

# Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

## Aufgabenblatt 12

Besprechung in KW 5 / Abgabe in KW 6

### Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:

- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 15

### Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

### Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

### Aufgabe 3

Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

### Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind ( $L \subseteq \Sigma^*$  und  $\# \notin \Sigma$ ):

1.  $L$  wird von einer nichtdeterministische Turing-Maschine in Polynomialzeit erkannt.
2. Es gibt  $B \in P$ , es gibt ein Polynom  $p$  mit  $L = \{w \mid \exists y : w\#y \in B \wedge |y| \leq p(|w|)\}$

### Aufgabe 5

Wir betrachten die folgenden Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  ( $\text{bin}(n)$  bezeichnet die Binärdarstellung von  $n$ , niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen):

$$L_1 := \{\text{bin}(n_0)c \dots c \text{bin}(n_k) \mid k \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \forall i \in \{0, \dots, k\} : n_i \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \exists J \subseteq \{1, \dots, k\} : \sum_{i \in J} n_i = n_0 \}$$

$$L_2 := \{\text{bin}(n_0)c \dots c \text{bin}(n_k) \mid k \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \forall i \in \{0, \dots, k\} : n_i \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \exists J \subseteq \{0, \dots, k\} : \sum_{i \in J} n_i = \sum_{i \in \{0, \dots, k\} \setminus J} n_i \}$$

1. Zeigen Sie:  $L_1 \in NP$  und  $L_2 \in NP$ .
2. Zeigen Sie:  $L_1 \equiv_{\text{mo}}^{\text{poly}} L_2$ .

**Bemerkung:** Sowohl  $L_1$  als auch  $L_2$  sind NP-vollständig (vgl. in der Literatur: Knapsack, Partition).

### Aufgabe 6

Zeigen Sie:

1.  $A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B \iff \bar{A} \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} \bar{B}$ .
2.  $(A \in NPC \wedge NP \neq \text{co-NP}) \implies (\{1\} \cdot A \cup \{2\} \cdot \bar{A} \notin NP \cup \text{co-NP})$ .

**Aufgabe 7**

Zeigen Sie:

1.  $P \subseteq \text{REC}$
2.  $P \subseteq \text{NP}$
3.  $\text{NP} \subseteq \text{REC}$
4.  $\text{CSL} \subseteq \text{REC}$

**Aufgabe 8**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen ( $\Sigma$  endliches Alphabet,  $A, B \subseteq \{0, 1\}^*$ ):

1.  $\text{co-P} = \text{P}$ .
2.  $A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B \implies B \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} A$ .
3.  $(A \in \text{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\} \wedge B \in \text{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}) \implies A \equiv_{\text{mo}}^{\text{poly}} B$ .
4. Auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet  $\Sigma$  ist die Relation  $\leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}$  antisymmetrisch.

**Aufgabe 9**

Zeigen Sie: ( $\Sigma$  endliches Alphabet,  $A, B \subseteq \{0, 1\}^*$ , vollständig jeweils bezüglich  $\leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}$ )

1.  $(A \text{ NP-vollständig und } A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B \text{ und } B \in \text{NP}) \implies B \text{ NP-vollständig}$ .
2. Keine nichtentscheidbare Sprache ist NP-vollständig.

**Aufgabe 10**

Zeigen Sie, dass die Klassen P und NP unter Vereinigung, Schnittbildung, Konkatenation und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind.

**Aufgabe 11**

Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit den folgenden Sprachklassen: CFL, P, NP, co-NP, REC und RE. Tragen Sie die Sprachen  $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  und  $H$  in dieses Venn-Diagramm ein.

**Aufgabe 12**

Zeigen Sie: Das Entscheidungsproblem, ob ein Graph ein Eulerkreis hat, liegt in P. Ergebnisse aus der Graphentheorie dürfen benutzt werden.

**Aufgabe 13**

Zeigen Sie: Das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln in disjunktiver Normalform (Disjunktion von  $\wedge$ -Klauseln) liegt in P.

**Aufgabe 14**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen ( $\Sigma$  endliches Alphabet,  $A, B \subseteq \{0, 1\}^*$ ):

1. Sind  $A$  und  $B$  beide nicht-entscheidbar, so gibt es eine totale bijektive Funktion von  $A$  auf  $B$ .
2. Ist  $A$  nicht-aufzählbar, so gibt es eine totale bijektive Funktion von  $A$  auf  $\bar{A}$ .
3. Ist  $A$  aufzählbar und gibt es eine totale bijektive Funktion von  $A$  auf  $\bar{A}$ , so ist  $A$  entscheidbar.
4. Ist  $A$  aufzählbar und gibt es eine berechenbare surjektive Funktion von  $A$  auf  $\bar{A}$ , so ist  $A$  entscheidbar.
5. Ist  $A$  many-one reduzierbar auf eine kontextfreie Sprache, so ist  $A$  entscheidbar.
6. Ist eine kontextfreie Sprache  $L$  auf eine  $A$  many-one reduzierbar, so ist  $A$  entscheidbar.
7. Ist  $A$  regulär und  $B$  kontextfrei und beide nicht trivial, so sind sie bezüglich der polynomiellen many-one Reduktion äquivalent.

**Aufgabe 15**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Ist die charakteristische Funktion  $\chi_A$  der Sprache  $A$  in Zeit  $\mathcal{O}(\log(n!))$  berechenbar, so liegt  $A$  in P.
2. Gibt es eine Turing-Maschine  $M$ , welche die Sprache  $L$  in Zeit  $\Omega(2^n)$  entscheidet, so liegt  $L$  nicht in P.
3. Gibt es eine kontextfreie NP-vollständige Sprache, so gilt  $P = NP$ .