

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 11

Besprechung in KW 4 / Abgabe in KW 5

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:

- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 17

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür angewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

$L_1 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine gerade Anzahl von Zuständen}\}$

$L_2 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von } \lambda \text{ wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\}$

Aufgabe 5

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0, 1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich \leq_{mo})

1. (A RE-vollständig und $A \leq_{\text{mo}} B$ und $B \in \text{RE}$) $\implies B$ RE-vollständig.
2. H ist RE-vollständig ist:
Hinweis: Zu $L(M_u)$ definiere $f_u : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ mit $f_u(w) = \langle u, v \rangle$
3. H_1 ist RE-vollständig.
Hinweis: Zeigen Sie $H \equiv_{\text{mo}} H_1$
4. Es gibt RE-vollständige Sprachen in $\{0\}^*$.
5. Keine entscheidbare Sprache ist RE-vollständig.
6. Jede nicht-triviale entscheidbare Sprache ist REC-vollständig..

Aufgabe 6 (für gute Studierende)

Sei $L_1 := \{x \mid x \text{ ist Code einer TM und } \exists y : M_x(y) \downarrow 11\}$, und

$L_2 := \{x \mid x \text{ ist Code einer TM und } \exists z : M_x(x) \downarrow z \wedge z \neq x\}$.

Zeigen Sie, daß L_1 und L_2 aufzählbar sind,

- indem Sie jeweils eine erkennende Turing-Maschine skizzieren, sowie
- indem Sie L_1 bzw. L_2 jeweils auf $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \downarrow\}$ reduzieren.

Aufgabe 7

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

- $$L_1 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine ungerade Anzahl von Zuständen}\}$$
- $$L_2 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von 010 wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\}$$
- $$L_3 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt für unendlich viele Eingaben.}\}$$
- $$L_4 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von } \lambda \text{ wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\}$$

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen kontextsensitiv sind:

- $$L_1 := \{a^n c a^n c a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
- $$L_2 := \{a^n c a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$$
- $$L_3 := \{\text{bin}(n^2) \mid n \in \mathbb{N}\}$$
- $$L_4 := \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist Primzahl}\}$$
- $$L_5 := \{\text{bin}(n) \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist Primzahl}\}$$
- $$L_6 := \{w c w \mid w \in \{a, b\}^*\}$$
- $$L_7 := \{a^n c a^m c a^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge k = n \cdot m\}$$
- $$L_8 := \{\text{bin}(n) c \text{bin}(m) c \text{bin}(k) \mid n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge k = n \cdot m\}$$

$\text{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n , niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen).

Hinweis: Nutzen Sie die Äquivalenz von kontextsensitiven Sprachen und Sprachen, die von linear beschränkten Automaten erkannt werden.

Aufgabe 9

Zeigen Sie, dass die kontextsensitiven Sprachen unter Vereinigung, Schnittbildung, Konkatenation und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind.

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass die kontextsensitiven Sprachen und die entscheidbaren Sprachen nicht unter Homomorphismus abgeschlossen sind.

Aufgabe 11

Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\text{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n , niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen):

- $$L_1 := \{a^n c a^m c a^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge k = n \cdot m\}$$
- $$L_2 := \{\text{bin}(n) c \text{bin}(m) c \text{bin}(k) \mid n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge k = n \cdot m\}$$

Zu L_1 und L_2 betrachten wir die im Folgenden kurz beschriebenen Turing-Maschinen M_1 und M_2 , welche L_1 und L_2 entscheiden: im Wesentlichen subtrahieren die Turing-Maschinen n m -mal vom Startwert k ; wird dadurch genau 0 erreicht, so wird akzeptiert ansonsten verworfen. (Natürlich müssen M_1 und M_2 auch prüfen, dass die Eingabe die korrekte Form hat.)

1. Wird durch die Turing-Maschinen M_1 und M_2 bezeugt, dass L_1 und L_2 in P liegen?
2. Liegen L_1 und L_2 in P?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 12

Zeigen Sie, dass bei unärer Eingabe die Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, ganzzahlige Division, Modulobildung auf den Natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit Turing-Maschinen in polynomieller Zeit realisierbar sind.

Aufgabe 13

1 Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in P liegen:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{wv \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(v)\} \\ L_2 &:= \{a^n \mid n+4 \text{ und } n, n+2 \text{ sind Primzahlen}\} \\ L_{k,j} &:= \{a^i \mid \text{die Dezimaldarstellung von } k^i \text{ endet mit der Ziffer } j\} \\ &\quad \text{für } k \in \{2, 3, \dots, 9\} \text{ und } j \in \{0, 1, \dots, 9\} \end{aligned}$$

Hinweis: Ordnen Sie die Sprachen in die Chomsky-Hierarchie ein!

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in P liegen:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &:= \{a^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\} \\ L_3 &:= \{\text{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\} \\ L_4 &:= \{a^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2^m\} \\ L_5 &:= \{\text{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2^m\} \\ L_6 &:= \{wcvcu \mid w, v, u \in \{a,b\}^* \wedge (w = v \vee w = u)\} \\ L_7 &:= \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 15

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich $\leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}$)

1. (A NP-vollständig und $A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B$ und $B \in \text{NP}$) $\implies B$ NP-vollständig.
2. Keine nichtentscheidbare Sprache ist NP-vollständig.
3. Jede nicht-triviale Sprache in P ist P-vollständig.

Aufgabe 16

Welche der Eigenschaften “reflexiv”, “symmetrisch”, “antisymmetrisch”, “transitiv” haben die Relationen $\leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}$ bzw. $\equiv_{\text{mo}}^{\text{poly}}$ auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}^*$?

Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 17

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. ($A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B$) $\implies (A \leq_{\text{mo}} B)$
2. ($A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B \wedge B \in \text{P}$) $\implies A \in \text{P}$
3. ($A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B \wedge A \notin \text{NP}$) $\implies B \notin \text{NP}$.
4. ($A \in \text{P}$ entscheidbar $\wedge B \neq \emptyset \wedge B \neq \{0,1\}^*$), dann ist $A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B$.
5. (A NP-vollständig $\wedge A \in \text{P}$) $\implies (\text{P} = \text{NP})$.

Definition: [reduzierbar in Polynomialzeit]:

$$\begin{aligned} L \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} L' &\iff L \text{ (many-one) reduzierbar in Polynomialzeit auf } L' \\ &:\iff \exists f : \Sigma_L^* \rightarrow \Sigma_{L'}^*, \text{ total und in Polynomialzeit berechenbar mit} \\ &\quad \forall w \in \Sigma_L^* : w \in L \iff f(w) \in L' \end{aligned}$$

$$L \equiv_{\text{mo}}^{\text{poly}} L' \iff (L \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} L' \wedge L' \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} L)$$

Definition: [NP-vollständig]:

Eine Sprache A heisst NP-vollständig bzgl. der Reduktion \leq_m^{poly} genau dann, wenn $A \in \text{NP}$ und $\forall L \in \text{NP} : L \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} A$.