Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 10

Besprechung in KW 3 / Abgabe in KW 4

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 19

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Geben Sie berechenbare Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 aus Σ^* nach Σ^* an, die folgende Eigenschaften haben:

1. $\mathrm{Def}(f_1)$ nicht-entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_1)$ entscheidbar.
2. $\mathrm{Def}(f_2)$ nicht-entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_2)$ nicht-entscheidbar.
3. $\mathrm{Def}(f_3)$ entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_3)$ nicht-entscheidbar.
4. $\mathrm{Def}(f_4)$ entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_4)$ entscheidbar.

Begründen Sie jeweils, weshalb die geforderten Eigenschaften erfüllt werden.

Aufgabe 5
Sei f eine Funktion aus Σ^* nach Σ^*. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. f berechenbar $\Longrightarrow$ $\mathrm{Bild}(f)$ aufzählbar.
2. f berechenbar $\Longrightarrow$ $\mathrm{Def}(f)$ aufzählbar.
3. f berechenbar und total $\Longrightarrow$ $\mathrm{Bild}(f)$ entscheidbar.
4. f berechenbar und total $\Longrightarrow$ $\mathrm{Def}(f)$ entscheidbar.

Aufgabe 6
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist abzählbar.
2. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist abzählbar.
4. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist abzählbar.
5. Jede Obermenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.
6. Jede Obermenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.
7. Jede Teilmenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.

Aufgabe 7
Welche der Eigenschaften "reflexiv", "symmetrisch", "antisymmetrisch", "transitiv" haben die Relationen "$\leq_{\mathrm{mo}}$" bzw. "$\equiv_{\mathrm{mo}}$" auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 8
Zeigen Sie für folgende Sprachpaare (L_1, L_2), daß $L_1 \leq_m L_2$ und $L_2 \leq_m L_1$.

1. $L_1 := \{aa\}$ und $L_2 := \{b, a\}$,
2. $L_1 := \{aa\}$ und $L_2 := \{w \in \{c\}^* \mid |w| \text{ ist durch 4 teilbar}\}$,
3. $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \text{ ist gerade}\}$ und $L_2 := \{w \in \{c\}^* \mid |w| \text{ ist durch 4 teilbar}\}$,
4. $L_1 := \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ und $L_2 := \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$.

Aufgabe 9
Sind folgende Funktionen $f : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$ Reduktionen von L_1 auf L_2 ($L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$)?

1. $f(w) := a^{\#_a(w)}$, $L_1 := \{ab\}$ und $L_2 := \{b, a\}$.
2. $f(w) := ww$, $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 2 \text{ teilt } |w|)\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 4 \text{ teilt } |w|\}$,
3. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$, $L_1 := \{(aab)^n \in \{a,b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 4 \text{ teilt } \#_b(w)\}$,
4. $f(w) := w\overleftarrow{w}$, $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ endet mit } aa\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid aaa \text{ Teilwort von } w\}$,
5. $f(w) := w\overleftarrow{w}$, $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ endet mit } a\}$ und $L_2 := \{uaav \mid u, v \in \{a,b\}^* \wedge |u| = |v|\}$.

Aufgabe 10
Sind folgende Funktionen $f : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$ Reduktionen von L_1 auf L_2 ($L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$)?

1. $f(w) := (w\overleftarrow{w})^2$,
   $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$,
2. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$,
   $L_1 := \{(aba)^{3n} \in \{a,b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 6 \text{ teilt } \#_b(w)\}$

Aufgabe 11
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_{\mathrm{mo}} B \wedge B \in \mathrm{REC}) \implies A \in \mathrm{REC}$.
2. $(A \leq_{\mathrm{mo}} B \wedge A \notin \mathrm{RE}) \implies B \notin \mathrm{RE}$.
3. Ist A entscheidbar, $B \neq \emptyset$, $B \neq \{0,1\}^*$, dann ist $A \leq_{\mathrm{mo}} B$.
4. $[\, L \in \mathrm{RE} \wedge L \notin \mathrm{REC}\,] \implies [L \not\leq_{\mathrm{mo}} \overline{L} \text{ und } \overline{L} \not\leq_{\mathrm{mo}} L]$.
5. $A \leq_{\mathrm{mo}} B \iff \overline{A} \leq_{\mathrm{mo}} \overline{B}$
6. $H_1 \leq_{\mathrm{mo}} \big(\{1\} \cdot H_1 \,\cup\, \{0\} \cdot \overline{H_1}\big)$, $\overline{H_1} \leq_{\mathrm{mo}} \big(\{1\} \cdot H_1 \,\cup\, \{0\} \cdot \overline{H_1}\big)$
7. $\big(\{1\} \cdot H_1 \,\cup\, \{0\} \cdot \overline{H_1}\big)$ ist weder aufzählbar noch co-aufzählbar.
8. Es gibt eine Sprache L, so daß weder die Sprache L noch ihr Komplement $\overline{L}$ aufzählbar sind.
9. Es gibt nicht-entscheidbare Sprachen A und B mit $A \leq_{\mathrm{mo}} B$ und $B \not\leq_{\mathrm{mo}} A$.

Aufgabe 12
Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine unendliche nicht-aufzählbare Menge und sei $f : \mathbb{N} \to A$ definiert durch:

$$f(i) := \begin{cases} \min(A) & \text{falls } i = 0, \\ \min(A \setminus \{f(l) \mid l = 0, \ldots, i-1\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. f ist eine totale Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$.
2. Die Funktion f ist keine Reduktion von $\mathbb{N}$ auf A.
3. Die Funktion $g : \{a\}^* \to \{a\}^*$ mit $g(a^n) := a^{f(n)}$ ist keine Reduktion von $\{a\}^*$ auf $\{a^i \mid i \in A\}$.

Aufgabe 13
Wir betrachten die Funktion f, welche das Programm u einer Turing-Maschine M_u in das Programm v einer Turing-Maschine M_v abbildet die sich wie folgt verhält:

- Bei Eingabe eines Wortes x löscht M_v zunächst seine Eingabe (d.h. M_v ersetzt x durch λ). Anschließend schreibt M_v das Paar (u, u) auf das Band und verhält sich anschließend wie die universelle Turing Maschine (d.h. M_v simuliert M_u auf Input u). Anschließend löscht M_v ihr Band und stoppt.

Zeigen Sie:

1. f ist berechenbar.
2. f ist jeweils eine Reduktionsfunktion von $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$ auf die folgenden Sprachen L_i ($i = 1, \ldots, 4$)

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v\ (\lambda)\downarrow\}\\
L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) \neq \emptyset\ \}\\
L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt für unendlich viele Eingaben}\}\\
L_4 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \exists x : M_v(x) \downarrow \lambda\}\\
L_5 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \forall x : M_v(x) \downarrow \lambda\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14
Schlagen Sie die Definitionen von $\mathcal{O}$, $\mathcal{o}$, Ω und ω nach.

Aufgabe 15
Schlagen Sie die Regel von (de) L'Hôpital nach.

Aufgabe 16
Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihren Wachstumseigenschaften:

$\log n$, $\sqrt{\log n}$, $\sqrt{n}$, $(\log\sqrt{n})^2$, $\frac{n}{\log n}$, n^2, n^k (für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$), $n^{\log n}$, $n^{\log\log n}$, $\log(n^2)$, $(\log n)^2$, n^n, $\log\log\log n$, $\sum_{i=0}^{n} i$, $\sum_{i=0}^{n} i^2$, $2^{n\log n}$, $(\sqrt{\log n})^{\log\log n}$.

Beweisen Sie jeweils die entsprechenden $\mathcal{O}$– bzw. $\mathcal{o}$–Beziehungen.

Aufgabe 17
Zeigen Sie: $\mathcal{O}(\log) = \mathcal{O}(\log_{10}) = \mathcal{O}(\ln) = \mathcal{O}(\log(2n)) = \mathcal{O}(\log(n + \log(n)) = \mathcal{O}(\log(n^2))$

Aufgabe 18
Sei $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ die Menge der totalen Funktionen von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}_0$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen ($f, g \in \mathcal{F}_{\text{tot}}$): ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

1. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{O}(h)$
2. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{o}(h) \implies f \in \mathcal{o}(h)$
3. $f \in \mathcal{o}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{o}(h)$
4. Die Relation $R_{\mathcal{O}} := \{(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \mathcal{O}(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.
5. Die Relation $R_{\mathcal{o}} := \{(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \mathcal{o}(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.
6. Die Relation $R_{\Omega} := \{(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \Omega(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Aufgabe 19

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $\neg(\overline{H_1} \leq_{\text{mo}} H_1)$
2. Es gibt eine Sprache L, so daß weder die Sprache L noch ihr Komplement $\overline{L}$ aufzählbar sind.
3. Sind A und B RE-vollständig, so gilt $A \equiv_{\text{mo}} B$.

Definition: [reduzierbar]:

$L \leq_{\text{mo}} L' \iff L$ **(many-one) reduzierbar** auf L'

$:\iff \exists\, f : \Sigma_L^* \to \Sigma_{L'}^*$ total und berechenbar mit

$\forall w \in \Sigma_L^* : w \in L \iff f(w) \in L'$

$L \equiv_{\text{mo}} L' \;:\iff\; (L \leq_{\text{mo}} L' \;\wedge\; L' \leq_{\text{mo}} L)$

Definition: [vollständig]:

Für eine Sprachklasse $\mathcal{L}$ heisst eine Sprache A **$\mathcal{L}$-vollständig** bzgl. der Reduktion $\leq_m$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{L}$ und $\forall L \in \mathcal{L} : L \leq_{\text{mo}} A$.

Notation: Für eine Turing-Maschine M und ein Inputwort w bedeutet:

$M(w)\uparrow$	:	M angesetzt auf w stoppt nicht,
$M(w)\downarrow$	:	M angesetzt auf w stoppt,
$M(w)\downarrow v$	:	M angesetzt auf w stoppt mit Ausgabe v.
H	:=	$\{\langle u,v\rangle \mid u$ ist Code einer TM und $M_u(v)\downarrow\}$
H_1	:=	$\{u \mid u$ ist Code einer TM und $M_u(u)\downarrow\}$
