Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 1

Besprechung in KW 43 / Abgabe in KW 44

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 19 und 20

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Sei Q die Menge der Bundesländer der Bundesrepublik Deutschland, und K die Menge der Paare $(a, b) \in Q \times Q$ für die das Bundesland a und das Bundesland b eine gemeinsame Grenze haben. Ist die Relation K reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, transitiv?

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung!

Hinweis: `http://de.wikipedia.org/wiki/Deutschland`

Aufgabe 5
Geben Sie für jede der folgenden Relationen an, welche der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch und transitiv auf sie zutreffen. Die Relationen seien jeweils über der Menge der Deutschen definiert.

1. x hat den gleichen Vater wie y.
2. x und y haben ein gemeinsames Kind.
3. x ist Vorfahre von y.

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung!

Aufgabe 6
Sei A eine Menge und $\mathcal{P}(A)$ die zugehörige Potenzmenge. Auf $\mathcal{P}(A)$ definieren wir die symetrische Differenz $\triangle$ vermöge:

$$B \triangle C := (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Aufgabe 7
Recherchieren Sie die Begriffe: abzählbar, abzählbar unendlich, überabzählbar.

Siehe auch: `https://www.youtube.com/watch?v=OxGsU8oIWjY`

Aufgabe 8
Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig (in Zeichen $|A| = |B|$) genau dann, wenn es eine Bijektion (total, injektiv, surjektiv) von A auf B gibt.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\{0,1\}^*$ gleichmächtig sind.
3. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x\}$ und $]0;1[:= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ gleichmächtig sind.
   Hinweis: Denken Sie an z. B. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{x}$.
4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig sind.

Aufgabe 9
Seien A und B beliebige Mengen. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussagen!

1. $\emptyset = \{\emptyset\}$,
2. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
3. $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup B$,
4. $(A \cup B) = A \times B$,

Aufgabe 10
Auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten wir diem Relation R definiert durch:

$$iRj \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall k \in \mathbb{N} \,\text{mit}\, k \,\text{Primzahl}: k|i \Longrightarrow k|j)$$

Welche der folgenden Eigenschaften besitzt R :reflexiv, symetrisch, asymetrisch, antisymetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 11
Sei $A := \{a, aaa\}$, $B := \{\lambda, aa, bb\}$, $C := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ gerade }\}$.

Bestimmen Sie: $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot C$, $A \cdot A$, $B \cdot B$, $C \cdot C$, A^*, B^*, C^*.

Aufgabe 12
Sei A eine beliebige Wortmenge über dem endlichen Alphabet Σ. Zeigen Sie:

1. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $A \cdot A^i = A^i \cdot A$
2. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\{\lambda\}^i = \{\lambda\}$
3. Für $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt: $\emptyset^i = \emptyset$
4. $\emptyset^* = \{\lambda\}$

Aufgabe 13
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussagen!

1. $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$,
2. $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$,
3. $(A^*)^* = A^*$,
4. $(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$,
5. $(A \cdot B)^* = (A \cup B)^*$.

Aufgabe 14
Seien A eine beliebige Teilmenge von $\{0,1\}^*$. Zeigen Sie:

$$\lambda \in A^+ \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in A$$

Aufgabe 15
Sei Σ ein endliches Alphabet.

1. Zeigen Sie, dass die Menge Σ^* der Wörter über Σ abzählbar unendlich ist (d.h. gleichmächtig $\mathbb{N}$ ist).
2. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ nicht gleichmächtig Σ^* ist.
3. Zeigen Sie, dass die Menge der regulären Sprachen abzählbar unendlich ist.
4. Zeigen Sie, dass es nicht-reguläre Sprachen gibt.

Aufgabe 16
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie reguläre Ausdücke für die folgenden Sprachen an:

$$\emptyset \ , \ \{\lambda\} \ , \ \Sigma \ , \ \Sigma^0 \ , \Sigma^4 \ , \Sigma^* \ , \ \Sigma^+$$

Aufgabe 17
Geben Sie einen regulären Ausdruck für die folgende Sprache L_1 an:

$$\begin{array}{lcl} L_1 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid \ \#_a(w) \text{ ist durch 3 teilbar oder } \#_b(w) \text{ ist durch 5 teilbar}\} \\ L_2 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid \ \#_a(w) \text{ ist durch 3 teilbar und } \#_b(w) \text{ ist durch 5 teilbar}\} \\ L_3 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid \ \#_a(w) \text{ ist durch 3 teilbar oder } w \text{ enthält das Teilwort } bbaa\} \\ L_4 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid \ \#_a(w) \text{ ist durch 3 teilbar und } w \text{ enthält das Teilwort } bbaa\} \end{array}$$

Aufgabe 18
Sei Σ ein endliches Alphabet. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ von Σ^* betrachten wir diem Relation R definiert durch:

$$A \ R \ B \quad :\Longleftrightarrow \quad (A \subseteq B^*)$$

Welche der folgenden Eigenschaften besitzt R: reflexiv, symetrisch, asymetrisch, antisymetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 19
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0, 1\}^*$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussage formal !

1. $A^+ \subseteq A^*$,
2. $(A^*)^* = A^*$,
3. $(A \cap B)^* \supseteq (A^* \cap B^*)$,
4. $(A \cdot B)^* = (A^* \cdot B^*)$.

Aufgabe 20
Geben Sie einen regulären Ausdruck für die folgende Sprache L an:

$$L := \{w \in \{a,b\}^* \mid \ \#_a(w) \text{ ist nicht durch 5 teilbar oder } bbabbb \text{ ist Teilwort von } w\}$$