

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 9

Besprechung in KW50 / Abgabe in KW 51

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von: – Aufgabe 1,
– Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
– Aufgaben 18, 19

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür angewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4

Konstruieren Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 äquivalente Grammatiken, welche keine λ -Regeln (also keine Regeln der Form $A \rightarrow \lambda$ mit A Nonterminal) besitzen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

- $G_1 := (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, \{C \rightarrow \lambda, A \rightarrow aD, B \rightarrow bb, C \rightarrow bCb, D \rightarrow CB, D \rightarrow aa\}, A)$,
- $G_2 := (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A)$ mit
 $P = \{A \rightarrow aD, B \rightarrow C, B \rightarrow b, C \rightarrow bCb, C \rightarrow \lambda, D \rightarrow BCB, D \rightarrow aa\}$.

Aufgabe 5

Konstruieren Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 äquivalente Grammatiken, welche keine λ -Regeln (also keine Regeln der Form $A \rightarrow \lambda$ mit A Nonterminal) und keine längenerhaltenden Regeln (also keine Regeln der Form $A \rightarrow B$ mit A, B Nonterminals) besitzen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

- $G_1 := (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, \{D \rightarrow \lambda, A \rightarrow aDD, B \rightarrow bb, C \rightarrow bCb, C \rightarrow a, D \rightarrow C, D \rightarrow B, D \rightarrow aa\}, A)$
- $G_2 := (\{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow aD, B \rightarrow C, B \rightarrow b, C \rightarrow bCb, C \rightarrow B, C \rightarrow a, D \rightarrow BCB, D \rightarrow E, E \rightarrow A\}, A)$

Aufgabe 6

Konstruieren Sie zur der Grammatik $G_1 = (\{S, A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, B_3, C, C_1, C_2, C_3\}, \{a, b, c\}, P, S)$ eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

$$P := \{S \rightarrow aA \mid bB \mid cC, A \rightarrow A_1c \mid A_2A_1 \mid a, A_1 \rightarrow A_2 \mid aa, A_2 \rightarrow \lambda \mid bb, B \rightarrow B_3, B_1 \rightarrow B_2 \mid a, B_2 \rightarrow B_3 \mid b, B_3 \rightarrow B_1 \mid c, C \rightarrow C_1C_2C_3, C_1 \rightarrow C_1C_1C_1 \mid a, C_2 \rightarrow cC_2cC_2 \mid b, C_3 \rightarrow ccc\}$$

Aufgabe 7

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne λ -Regeln. Wir betrachten die folgenden Verfahren:

- (A) Solange es Regeln $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow \alpha$ gibt mit $A, B \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^+ \setminus N$, so dass $A \rightarrow \alpha$ noch nicht in der Regelmenge ist, füge die Regel $A \rightarrow \alpha$ zur Regelmenge hinzu.
- (B) Solange es Regeln $A \rightarrow \alpha B \beta$ und $B \rightarrow C$ gibt mit $A, B, C \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^*$, so dass $A \rightarrow \alpha C \beta$ noch nicht in der Regelmenge ist, füge die Regel $A \rightarrow \alpha C \beta$ zur Regelmenge hinzu.
- (C) Streiche alle Regeln $A \rightarrow B$ mit $A, B \in N$.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Das Verfahren (A) terminiert.
2. Das Verfahren (B) terminiert.
3. Durch Anwenden von (A) und danach (C) auf die Grammatik G erhält man eine zu G äquivalente Grammatik ohne Regeln der Form $A \rightarrow B$ mit $A, B \in N$.
4. Durch Anwenden von (B) und danach (C) auf die Grammatik G erhält man eine zu G äquivalente Grammatik ohne Regeln der Form $A \rightarrow B$ mit $A, B \in N$.

Hinweis: Betrachten Sie unter anderem die Grammatik $G = (\{A, B, C, D, E, S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow A, A \rightarrow B, B \rightarrow CD, C \rightarrow E, D \rightarrow F, E \rightarrow a, F \rightarrow b\}, S)$.

Aufgabe 8

Zu $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir

$$\begin{aligned} \text{ANF}(L) &:= \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } wv \in L\}, \\ \text{END}(L) &:= \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } v w \in L\}, \\ \text{SUB}(L) &:= \{w \mid \exists v, u \in \Sigma^* \text{ mit } vwu \in L\}. \end{aligned}$$

1. Geben Sie $\text{ANF}(L)$, $\text{END}(L)$ und $\text{SUB}(L)$ für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):

$$L_1 := \{ab, aababb, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad L_3 := \{w \overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer finiter Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	3	4	5	6	7	8
a	{2}	{5}	\emptyset	\emptyset	{2}	\emptyset	\emptyset	\emptyset
b	\emptyset	\emptyset	{4}	{5}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
c	\emptyset	{6}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	{7}	{7, 8}	{8}

Geben Sie nichtdeterministische Automaten an, die $\text{ANF}(L(M))$, $\text{END}(L(M))$ und $\text{SUB}(L(M))$ erkennen.

3. Zeigen Sie: Wird L von einem finiten Automat erkannt, so auch $\text{ANF}(L)$, $\text{END}(L)$ und $\text{SUB}(L)$.
4. Zeigen Sie: Wird L von einer kontextfreien Grammatik erzeugt, so auch $\text{ANF}(L)$, $\text{END}(L)$ und $\text{SUB}(L)$.

Aufgabe 9

Wir definieren die Wortfolge $(w_i \mid i \in \mathbb{N})$ induktiv vermöge $w_0 := \lambda$ und $w_{i+1} := w_i \cdot b \cdot a^i$ für $i \in \mathbb{N}$. Weiter sei $L := \{w_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Beweisen Sie:

1. $\{|w| \mid w \in L\} = \{\frac{n(n+1)}{2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
2. $\forall w \in L \quad \forall p \in \mathbb{N}_o \quad \exists n \in \mathbb{N}_0 : (n > |w| \wedge L \cap \{v \in \{a, b\}^* \mid n \leq |v| \leq n + p\} = \emptyset)$.
3. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht.

Aufgabe 10

Angenommen, wir nehmen folgende Änderungen in der Definition der kontextfreien Pumping-Eigenschaft vor:

1. “ $(\forall z \in L \text{ mit } |z| \geq k)$ ” durch “ $(\forall z \in L)$ ” ersetzen.
2. “ $(\forall z \in L \text{ mit } |z| \geq k)$ ” durch “ $(\forall z \in \Sigma^* \text{ mit } |z| \geq k)$ ” ersetzen.
3. Die Bedingung “ $vx \neq \lambda$ ” weglassen.
4. “ $(\forall i \in \mathbb{N}_0)$ ” durch “ $(\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ ” ersetzen.
5. “ $vx \neq \lambda$ ” durch “ $v \neq \lambda \wedge x \neq \lambda$ ” ersetzen
6. “ $(\forall i \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^iy$ ” durch “ $(\forall i, j \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^jy$ ” ersetzen.
7. “ $(\exists u, v, w, x, y \text{ mit } \dots)(\forall i \in \mathbb{N}_0)$ ” durch “ $(\forall i \in \mathbb{N}_0)(\exists u, v, w, x, y \text{ mit } \dots)$ ” ersetzen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Hinweis: Denken Sie bei 5. an $L = \{a^n b^n c^n d^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a, b, c\}^*$, und bei 7. an $L = \{b^j a^p b^p c^p \mid j \in \mathbb{N}_0, j \neq 0, p \in \mathbb{N}_0, p \neq 0\}$.

Aufgabe 11

Beweisen Sie, dass die folgenden Sprachen L_i die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht haben:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\ L_2 &= \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\ L_3 &= \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ L_4 &= \{a^m \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : n = m^2\} \\ L_5 &= \{a^p \mid p \text{ Primzahl}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 12

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei? Beweisen sie Ihre Aussagen!

$$\begin{aligned} L_1 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w = v\} \\ L_2 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, |w| = |v|\} \\ L_3 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq v\} \\ L_4 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq v, |w| = |v|\} \\ L_5 &= \{a, b\}^* \setminus \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ L_6 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w = \overleftarrow{v}\} \\ L_7 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, |w| = |\overleftarrow{v}|\} \\ L_8 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq \overleftarrow{v}\} \\ L_9 &= \{wvu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = v = u\} \\ L_{10} &= \{wcvcu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = v = u\} \\ L_{11} &= \{wvu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = \overleftarrow{v} = u\} \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Ist $L := \{a^p \mid p, p+2 \text{ und } p+4 \text{ sind alle drei Primzahlen}\}$ eine kontextfreie Sprache? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 14

Sei Σ ein Alphabet, L eine kontextfreie Sprache über Σ , R eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus von Σ^* nach Σ^* . Zeigen Sie:

1. $L \cap R$ ist kontextfrei,
2. $h(L)$ ist kontextfrei,
3. $h^{-1}(L)$ ist kontextfrei

Aufgabe 15

Wir betrachten die *Dyck-Sprachen* $D_1 := L(G_1)$ und $D_2 := L(G_2)$, wo

$$\begin{aligned} G_1 &= (\{S\}, \{(\,)\}, \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \lambda, S \rightarrow (S)\}, S) \\ G_2 &= (\{S\}, \{(\,), [\,]\}, \{S \rightarrow SS, S \rightarrow \lambda, S \rightarrow (S), S \rightarrow [S]\}, S) \end{aligned}$$

- Beschreiben Sie D_1 und D_2 umgangssprachlich.
Siehe auch: http://en.wikipedia.org/wiki/Dyck_language (englische Version!).
- Geben Sie erkennende Kellerautomaten für D_1 und D_2 an.
- Geben Sie Homomorphismen g, h und eine reguläre Sprache R an, so dass $D_1 = g(h^{-1}(D_2) \cap R)$.
- Geben Sie Homomorphismen g und h sowie eine reguläre Sprache R an, so dass $\{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\} = g(h^{-1}(D_2) \cap R)$ ist.

Aufgabe 16

Sei $L := \{w \in \{a, b\}^* \mid bb \text{ ist Teilwort von } w, \text{ oder } \#_a(w) \text{ ist Primzahl, oder } \#_b(w) = 0\}$. Zeigen Sie, dass L die kontextfreie Pumping-eigenschaft hat, aber nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 17

Sei $L := \{w_1 \# w_2 \# w_3 \cdots \# w_k \# \mid k \in \mathbb{N} \text{ gerade, } w_1 \in \{a, b\}^+, \forall i \in \{1, \dots, k-1\} : w_i = \overleftarrow{w_{i+1}}\}$
 $= \{(w \# \overleftarrow{w} \#)^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \{a, b\}^+\}$.

Zeigen Sie:

- L ist nicht kontextfrei,
- L ist Schnitt zweier kontextfreier Sprachen L_1 und L_2 ,
- Das Komplement von L ist eine kontextfreie Sprache.

Hinweis: Geben Sie einen erkennenden NPDA an

Aufgabe 18

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und seien $L, R \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen über Σ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Sie dürfen die in der Vorlesung bewiesenen Sätze verwenden, müssen diese aber zitieren.

- Keine Teilmenge einer kontextfreien Sprache ist regulär.
- $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \wedge R \in \text{CFL} \implies L \cap R \in \text{CFL}$.
- $L \in \text{CFL} \wedge R \in \text{CFL} \implies L \cap R \in \text{REG}$.
- $L \in \text{CFL} \implies \Sigma^* \setminus L \notin \text{CFL}$.
- Jede unendliche reguläre Sprache ist disjunkte Vereinigung zweier unendlicher regulärer Sprachen.
- Es gibt kontextfreie nichtreguläre Sprachen, die disjunkte Vereinigung von zwei unendlichen kontextfreien Sprachen sind.
- Die Vereinigung einer nicht-regulären Sprache mit einer kontextfreien Sprache ist nicht-regulär.
- Zu jeder kontextfreien Sprache gibt es unendlich viele kontextfreie Grammatiken, die diese Sprache erzeugen.

Aufgabe 19

Sei: $L_1 := \{a, d\}^* \cdot \{b, d\}^* \cdot \{c, d\}^*$
 $L_2 := \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
 $L_3 := \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a, b, c, d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\}$
 $L_4 := L_2 \cup L_3$

Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 sind kontextfrei?

Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen L_1, \dots, L_4 ?