Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 8

Besprechung in KW 49 / Abgabe in KW 50

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 17, 18

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:. [Recherchieren Sie die Begriffe *endlich*, *abzählbar*, *abzählbar unendlich* und *überabzählbar.]*

1. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist endlich.
2. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist abzählbar unendlich.
3. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist überabzählbar unendlich.

Aufgabe 5

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie linkslineare und rechtslineare Grammatiken sowie erkennende (nicht-deterministischen) Kellerautomaten für folgende Sprachen über Σ an:

$$\emptyset,\ \{\lambda\},\ \emptyset^*,\ \{\lambda\}^*,\ \{a,b,c\}^*,\ \{a,b\}^+,\ \{a,b,c\},\ \{abc\},\ \{a,b,c\}^3$$

Aufgabe 6

Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie erkennende (nicht-deterministische) Kellerautomaten sowie erzeugende kontextfreie Grammaitiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}\\
L_2 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\}\\
L_3 &:= L_1 \cup L_2\\
L_4 &:= L_1 \cap L_2\\
L_5 &:= L_1 \cdot L_2
\end{aligned}$$

Versuchen Sie jeweils, Keller-Alphabete mit wenigen Zeichen zu benutzen.

Aufgabe 7

Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie erkennende Kellerautomaten sowie erzeugende kontextfreie Grammaitiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{wv \mid v \in \{c\}^+,\ w \in \{a,b\}^*,\ |w| = |v|\}\\
L_2 &:= \{a^i b^j \mid i,j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\}\\
L_3 &:= L_1 \cdot L_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 8
Sei $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \land (i = j \lor j = k)\}$.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für L an.
2. Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zu G einen Kellerautomaten P, der L erkennt.
3. Geben Sie für Ihre Grammatik G zum Wort $w = a^3b^3c^3$ alle Ableitungsbäume an.
4. Geben Sie zu jedem der Ableitungsbäume die entsprechenden Läufe auf w von P an.

Aufgabe 9
Geben Sie jeweils allgemeine Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{array}{lcl}
L_1 & := & \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_2 & := & \{a^{n^2} b a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_3 & := & \{\mathrm{bin}(n) \cdot a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_4 & := & \{\mathrm{bin}(n)\$\,\mathrm{bin}(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_5 & := & \{\mathrm{bin}(n)\$\,\mathrm{bin}(m)\$\{\mathrm{bin}(n+m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}
\end{array}$$

Notation: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\mathrm{bin}(n)$ die Binärdarstellung von n, ohne führende Nullen, mit der niederwertigsten Ziffer hinten.

Aufgabe 10
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G := (\{X\}, \{a, b\}, P, X)$ Pushdown-Automaten nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren, mit $P: \quad X \to XX \mid aXb \mid bXa \mid ab \mid ba$.
Sei $w := baabba$. Geben Sie alle Ableitungsbäume für w bezüglich der Grammatik G an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten jeweils Läufe auf dem Wort w an, die den verschiedenen Ableitungsbäumen entsprechenden. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 11
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N = \{S\}$, $T = \{(,), \emptyset, a, b, c, \cdot, \cup, ^*\}$ und
$P = \{S \to (\emptyset), S \to (a), S \to (b), S \to (c), S \to (S \cdot S), S \to (S \cup S), S \to (S)^*\}$.
Welche Sprache wird von der Grammatik G erzeugt?

Aufgabe 12
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G := (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ Pushdown-Automaten nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren, wobei
$P := \{S \to AbS, S \to CAB, A \to cA, A \to a, B \to CBb, B \to b, C \to dd\}$.
Sei $w := ccabddcaddddbbb$. Geben Sie einen Ableitungsbaum B für w an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten jeweils einen dem Ableitungsbaum B entsprechenden Lauf auf dem Wort w an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 13
Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit:

$$\begin{aligned}
P = \{ & S \to Aa \mid Bb \mid Sa \mid Sb\ ,\ A \to Aa \mid Ab \mid Cc\ ,\ B \to Ba \mid Bb \mid D\,c, \\
& C \to Cc \mid Fa\ ,\ D \to Dc \mid Fb\ ,\ E \to Ea \mid Eb \mid \lambda\ ,\ F \to E\}
\end{aligned}$$

1. Konstruieren Sie einen finiten Automaten M zur Sprache $L(G)$.
2. Geben Sie für alle Klassen der Relation $R_{L(G)}$ jeweils einen die Klasse beschreibenden regulären Ausdruck an.
3. Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, der $L(G)$ beschreibt.
4. Konstruieren Sie eine rechtsslineare Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$.

Aufgabe 14
Sei $P = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ ein nichtdeterministischer Kellerautomat (NPDA). Sei $\perp$ ein Zeichen in Γ. Wir definieren:

$$\begin{array}{lcl} L(P) & := & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\} \\ L_\lambda(P) & := & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in K \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\} \\ L_f(P) & := & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \, \exists \alpha \in \Gamma^* \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \alpha)\} \\ L_\perp(P) & = & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \text{ mit } (q_0, w, \perp) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\} \end{array}$$

1. Gilt für jeden NPDA P, dass $L(P) = L_f(P)$ ist? (Begründung!)
2. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
   Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_f(P) = L$.
3. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
   Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_\perp(P) = L$.
4. Gilt für jeden NPDA P, dass $L(P) = L_\lambda(P)$ ist? (Begründung!)
5. Zeigen Sie: Für jeden NPDA P gilt: $\lambda \in L_\lambda(P)$
6. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Gilt die folgende Aussage: Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_\lambda(P) = L$.

Bemerkung: Will man einen Akzeptanzmodus über leeren Keller definieren, der äquivalent zu den anderen ist, so muss man definieren: $L'_\lambda(P) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in K \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^+ (p, \lambda, \lambda)\}$

Aufgabe 15
Zu einer kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ definieren wir:

$$\begin{array}{lcll} N_{\text{erz}} & := & \{X \in N \mid \exists w \in T^* \, (X \xrightarrow{*} w)\} & \text{erzeugende Nonterminals} \\ N_{\text{err}} & := & \{X \in N \mid \exists \alpha, \beta \in (T \cup N)^* \,:\, (S \xrightarrow{*} \alpha X \beta)\} & \text{erreichbare Nonterminals} \\ N_{\text{ntz}} & := & \{X \in N \mid \exists \alpha, \beta \in (T \cup N)^* \, \exists w \in T^* \,:\, (S \xrightarrow{*} \alpha X \beta \xrightarrow{*} w\} & \text{nützliche Nonterminals} \end{array}$$

Geben Sie ein Verfahren an, das zu einer Grammatik $G = (N, T, P, S)$ die Mengen N_{erz}, N_{err} und N_{ntz} bestimmt.

1. Gilt im Allgemeinen $N_{\text{ntz}} = N_{\text{erz}} \cap N_{\text{err}}$?
2. Geben Sie ein Verfahren an, das entscheidet, ob $L(G) = \emptyset$ ist.
3. Gibt es zu jeder kontextfreien Grammatik G eine äquivalente Grammatik G', die nur nützliche Nonterminals besitzt?
4. Geben Sie ein Verfahren an das zu einer Grammatik G mit $L(G) \neq \emptyset$ eine äquivalente Grammatik G' erzeugt, die nur nützliche Nonterminals besitzt.
5. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die Grammatik $G := (\{A, B, C, D, E\}\ ,\ \{a, b\}\ ,\ P\ ,\ A)$ an, wo $P := \{A \to AC, A \to B, B \to bb, C \to CD, C \to a, C \to Ca, E \to aE, E \to aa\}$

Aufgabe 16
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Auf N ist die Relation $\backsim$ definiert vermöge

$$X \backsim Y \;:\iff\; X \xrightarrow{*} Y \wedge Y \xrightarrow{*} X.$$

sowie auf $N/\backsim$ die Relation $\rightsquigarrow$ vermöge

$$A \rightsquigarrow B \;:\iff\; \exists X \in A, \exists Y \in B \text{ mit } (X, Y) \in P.$$

Zeigen Sie, dass $\backsim$ eine Äquivalenzrelation und $\rightsquigarrow^*$ eine Ordnungsrelation ist. ($\rightsquigarrow^*$ ist die reflexiv transitive Hülle von $\rightsquigarrow$.)

Aufgabe 17
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie erkennende Kellerautomaten sowie erzeugende kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$L_1 := \{wv \mid v \in \{c\}^+,\, w \in \{a,b\}^*,\, |w| = |v|\}$$
$$L_2 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\}$$

Kommentieren Sie die Grammatiken und die Keller-Programme!

Aufgabe 18
Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit:

$$P = \{S \to aA \mid bB \mid aS \mid bS\ ,\ A \to aA \mid bA \mid cC\ ,\ B \to aB \mid bB \mid cD\ ,$$
$$C \to cC \mid aF\ ,\ D \to cD \mid bF\ ,\ E \to aE \mid bE \mid \lambda\ ,\ F \to E\}$$

1. Konstruieren Sie einen finiten Automaten M zur Sprache $L(G)$.
2. Geben Sie für alle Klassen der Relation $\approx_{L(G)}$ jeweils einen die Klasse beschreibenden regulären Ausdruck an.
3. Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, der $L(G)$ beschreibt.
4. Konstruieren Sie eine linkslineare Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$.