Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 14

Besprechung in KW 5 / Abgabe in KW 6

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- entfällt

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind ($L \subseteq \Sigma^*$ und $\# \notin \Sigma$):

1. L wird von einer nichtdeterministische Turing-Maschine in Polynomialzeit erkannt.
2. Es gibt $B \in \mathrm{P}$, es gibt ein Polynom p mit $L = \{w \mid \exists y : w\#y \in B \wedge |y| \leq p(|w|)\}$

Aufgabe 5
Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\mathrm{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen):

$$\begin{aligned}
L_1 := \{\mathrm{bin}(n_0)c\ldots c\,\mathrm{bin}(n_k) \mid\ & k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\
& \forall i \in \{0,\ldots,k\} : n_i \in \mathbb{N} \ \text{ und} \\
& \exists J \subseteq \{1,\ldots,k\} : \sum_{i \in J} n_i = n_0 \ \} \\
L_2 := \{\mathrm{bin}(n_0)c\ldots c\,\mathrm{bin}(n_k) \mid\ & k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\
& \forall i \in \{0,\ldots,k\} : n_i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\
& \exists J \subseteq \{0,\ldots,k\} : \sum_{i \in J} n_i = \sum_{i \in \{0,\ldots,k\} \setminus J} n_i \ \}
\end{aligned}$$

1. Zeigen Sie: $L_1 \in \mathrm{NP}$ und $L_2 \in \mathrm{NP}$.
2. Zeigen Sie: $L_1 \equiv_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} L_2$.

Bemerkung: Sowohl L_1 als auch L_2 sind NP-vollständig (vgl. in der Literatur: Knappsack, Partition).

Aufgabe 6
Zeigen Sie:

1. $A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \iff \overline{A} \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} \overline{B}$.
2. $(A \in \mathrm{NPC} \wedge \mathrm{NP} \neq \text{co-NP}) \Longrightarrow (\{1\}\cdot A \cup \{2\}\cdot \overline{A} \notin \mathrm{NP} \cup \text{co-NP})$.

Aufgabe 7
Zeigen Sie:

1. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{REC}$
2. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$
3. $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{REC}$
4. $\mathrm{CSL} \subseteq \mathrm{REC}$

Aufgabe 8
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$):

1. $\text{co-P} = \mathrm{P}$.
2. $A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B \implies B \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} A$.
3. $(A \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\} \wedge B \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}) \implies A \equiv_{\text{mo}}^{\text{poly}} B$.
4. Auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet Σ ist die Relation $\leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}$ antisymmetrisch.

Aufgabe 9
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich $\leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}$)

1. (A NP-vollständig und $A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B$ und $B \in \mathrm{NP}$) $\implies$ B NP-vollständig.
2. Keine nichtentscheidbare Sprache ist NP-vollständig.

Aufgabe 10
Zeigen Sie, dass die Klassen P und NP unter Vereinigung, Schnittbildung, Konkatenation und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind.

Aufgabe 11
Zeichen Sie ein Venn-Diagramm mit den folgenden Sprachklasssen: CFL, P, NP, co-NP, REC und RE. Tragen Sie die Sprachen $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und H in dieses Venn.Diagramm ein.

Aufgabe 12
Zeigen Sie: Das Entscheidungsproblem, ob ein Graph ein Eulerkreis hat, liegt in P. Ergebnisse aus der Graphentheorie dürfen benutzt werden.

Aufgabe 13
Zeigen Sie: Das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln in disjunktiverer Normalform (Disjunktion von $\wedge$-Klauseln) liegt in P.

Aufgabe 14
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$):

1. Sind A und B beide nicht-entscheidbar, so gibt es eine totale bijektive Funktion von A auf B.
2. Ist A nicht-aufzählbar, so gibt es eine totale bijektive Funktion von A auf $\overline{A}$.
3. Ist A aufzählbar und gibt es eine totale bijektive Funktion von A auf $\overline{A}$, so ist A entscheidbar.
4. Ist A aufzählbar und gibt es eine berechenbare surjektive Funktion von A auf $\overline{A}$, so ist A entscheidbar.
5. Ist A many-one reduzierbar auf eine kontextfreie Sprache, so ist A entscheidbar.
6. Ist eine kontextfreie Sprache L auf eine A many-one reduzierbar, so ist A entscheidbar.
7. Ist A regulär und B kontextfrei und beide nicht trivial, so sind sie bezüglich der polynomiellen many-one Reduktion äquivalent.

Aufgabe 15
Schlagen Sie die Regel von (de) L'Hôpital nach.

Aufgabe 16
Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihren Wachstumseigenschaften:

$\log n\,,\ \sqrt{\log n}\,,\ \sqrt{n}\,,\ (\log\sqrt{n})^2\,,\ \frac{n}{\log n}\,,\ n^2\,,\ n^k$ (für $k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 3)\,,\ n^{\log n}\,,\ n^{\log\log n}\,,\ \log(n^2)\,,\ (\log n)^2\,,$ $n^n\,,\ \log\log\log n\,,\ \sum_{i=0}^{n} i\,,\ \sum_{i=0}^{n} i^2\,,\ 2^{n\log n}\,,\ (\sqrt{\log n})^{\log\log n}\,.$

Beweisen Sie jeweils die entsprechenden $\mathcal{O}$– bzw. $\mathcal{o}$–Beziehungen.

Aufgabe 17
Zeigen Sie: $\mathcal{O}(\log) = \mathcal{O}(\log_{10}) = \mathcal{O}(\ln) = \mathcal{O}(\log(2n)) = \mathcal{O}(\log(n + \log(n)) = \mathcal{O}(\log(n^2))$

Aufgabe 18
Sei $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ die Menge der totalen Funktionen von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}_0$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen ($f, g \in \mathcal{F}_{\text{tot}}$): ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

1. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{O}(h)$
2. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{o}(h) \implies f \in \mathcal{o}(h)$
3. $f \in \mathcal{o}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{o}(h)$
4. Die Relation $R_{\mathcal{O}} := \{(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \mathcal{O}(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.
5. Die Relation $R_{\mathcal{o}} := \{(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \mathcal{o}(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.
6. Die Relation $R_{\Omega} := \{(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \Omega(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Aufgabe 19
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Ist die charakteristische Funktion χ_A der Sprache A in Zeit $\mathcal{O}(\log(n!)$ berechenbar, so liegt A in P.
2. Gibt es eine Turing-Maschine M, welche die Sprache L in Zeit $\Omega(2^n)$ entscheidet, so liegt L nicht in P.
3. Gibt es eine kontextfreie NP-vollständige Sprache, so gilt P = NP.

Die Pflichtaufgaben entfallen bei diesem Übungsbatt. das heißt aber nicht, dass die Aufgaben dieses Blattes nichtprüfungsrelevant sind, eher im Gegenteil ...

Fragestunden in der vorlesungsfreien Zeit:

- Voraussichtlich BBB (im Raum der Übung) und/oder Präsenz, Termine werden in Moodle sowie auf der Homepage angekündigt.
- Bitte Fragen möglichst vorher per Mail stellen.
- Gibt es keine Fragen, so fällt die Fragestunde aus!
