Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 4

Besprechung in KW 45 / Abgabe in KW 46

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 14

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{aligned}
L_4 &:= \{w \cdot c \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^+\} \\
L_5 &:= \{w \in \{a, b, c\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^4\} \\
L_6 &:= \{a^n c^m b^l \mid n, m, l \in \mathbb{N} \ \wedge\ m \text{ ist Primzahl}\} \\
L_{\text{PAL}} &:= \{w \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\} \\
L_{\text{COPY}} &:= \{w \cdot w \mid w \in \{a, b\}^*\}
\end{aligned}$$

Definition: $\overleftarrow{w}$ ist induktiv definiert vermöge $\overleftarrow{\lambda} := \lambda$ sowie $\overleftarrow{v \cdot x} := x \cdot \overleftarrow{v}$ für $x \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$.

Aufgabe 5
Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ. Zeigen Sie:

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \forall A \in \mathcal{P}(L) \text{ mit } |A| > k \quad \exists w, w' \in A \ \exists x, x', y, y' \in \Sigma^* \text{ so, dass}$$
$$w \neq w' \ \wedge\ w = x \cdot y \wedge w' = x' \cdot y' \ \wedge\ |x| = \lfloor |w|/2 \rfloor \wedge |x'| = \lfloor w'|/2 \rfloor \ \wedge\ x \cdot y' \in L \wedge x' \cdot y \in L$$

Hinweis: Betrachten Sie die Läufe eines erkennenden DFA. $\mathcal{P}(L)$ bezeichnet die Potenzmenge von L.

Aufgabe 6
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $\alpha = (a \cup aba)^* \cdot a$ ein regulärer Ausdruck über Σ und $L = \mathcal{L}(\alpha)$. Konstruieren Sie ein λ-NFA zu L, einen DFA zu L, einen DFA zu $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ sowie einen regulären Ausdruck zu $\overline{L}$. Beschreiben Sie das Konstruktionsverfahren.

Aufgabe 7
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

1. Ist A regulär pumpbar und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär pumpbar.
2. Ist A nicht regulär pumpbar und $A \subseteq B$, so ist auch B nicht regulär pumpbar.
3. Ist A regulär und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär.
4. Ist $A \cap B$ regulär, so sind auch A und B regulär.
5. Jede endliche Sprache hat die reguläre Pumping-Eigenschaft.
6. Es gibt eine endliche Sprache über dem Alphabet $\{0,1\}$, welche die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht besitzt.
7. $A^+ = A^* \setminus \{\lambda\}$.
8. $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$.
9. Sind A und B regulär, so ist auch $A \setminus B$ regulär.
10. Sind A und B regulär pumpbar, so ist auch $A \cup B$ regulär.

Aufgabe 8
Sei $L := \{a^n b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

1. Die Wörter aus $\{a\}^*$ sind paarweise nicht äquivalent (bzgl. $\approx_L$).
2. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
3. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^{i+1}b^{2i+3}] = \{a^j b^l \mid j,l \in N \wedge l > 0 \wedge 3j - l = i\}$.
4. $\Sigma^*/\approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{[a^{i+1}b^{2i+3}] \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \{[b]\}$.

Hinweis: $\Sigma^*/\approx_L$ bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen von $\approx_L$ auf Σ^*.

Aufgabe 9
Sei $\Sigma = \{a,b,c\}$ ein Alphabet. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_0 &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_1 &:= \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &= \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 10
Sei $n_0 := 0$ und $n_{i+1} := n_i + 2i + 1$ für $i \in \mathbb{N}$, weiter sei $Q := \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Sprache $L := \{a^j \mid j \in Q\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$, sowie die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$. Zeigen Sie:

1. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
2. $\Sigma^*/\approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\}$.
3. $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 11
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{a\}$. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_{21} &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 5\} \\ L_{22} &:= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{23} &:= \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \wedge p \text{ ist Primzahl}\} \\ L_{24} &:= \{a^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{25} &:= \{(a^2)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 12
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen die reguläre Pumping-Eigenschaft haben, jedoch nicht regulär sind.

$L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aa, ab, ba \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } w \text{ enthält genau so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\}$
$L_3 := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } |w| \text{ ist eine Quadratzahl}\}$
$L_4 := L((a \cup b)^* \cdot (aa \cup bb) \cdot (a \cup b)^*) \ \cup \ \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\}$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die zur Sprache gehörende Relation jeweils unendlich viele Klassen hat.

Aufgabe 13
Sei $\Sigma = \{a,b,c\}$, A und B vollständige deterministische finite Automaten, $\sim_A$ und $\sim_B$ die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\approx_{L(A)}$ und $\approx_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $L(A) = L(B) \implies \sim_A = \sim_B$
2. $L(A) = L(B) \implies \approx_{L(A)} = \approx_{L(B)}$
3. $\approx_{L(A)} \supseteq \sim_A$
4. $L(A) \subseteq L(B) \implies \sim_A \subseteq \sim_B$
5. $\approx_{L(A)} \subseteq \approx_{L(B)} \implies \sim_A \subseteq \sim_B$

Aufgabe 14
Sei $\Sigma = \{a,b\}$ ein Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat.
2. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine Sprache $L_n \subseteq \Sigma^*$ so dass der Index (d.h. die Anzahl der Äquivalenzklassen) der zu L_n gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L_n}$ genau n ist.
3. Zu jeder Sprache L die von einem DFA A erkannt wird, gibt es unendlich viele weitere DFA, die die gleiche Sprache erkennen und deren Zustandsanzahlen alle verschieden sind.
4. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilsprache L' mit $L' \subseteq L \subseteq \Sigma^*$.
5. Ist $L \cup L'$ nicht-regulär, so sind weder L noch L' regulär.
6. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cap_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.
