Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 14

Besprechung in KW 05

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\mathrm{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen):

$$\begin{aligned} L_1 := \{\mathrm{bin}(n_0)c\ldots c\,\mathrm{bin}(n_k) \mid\ & k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ & \forall i \in \{0,\ldots,k\} : n_i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ & \exists J \subseteq \{1,\ldots,k\} : \sum_{i\in J} n_l = n_0 \ \} \\ L_2 := \{\mathrm{bin}(n_0)c\ldots c\,\mathrm{bin}(n_k) \mid\ & k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ & \forall i \in \{0,\ldots,k\} : n_i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ & \exists J \subseteq \{0,\ldots,k\} : \sum_{i\in J} n_i = \sum_{i\in\{0,\ldots,k\}\setminus J} n_i \ \} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie: $L_1 \in \mathrm{NP}$ und $L_2 \in \mathrm{NP}$.
2. Zeigen Sie: $L_1 \equiv_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} L_2$.

Bemerkung: Sowohl L_1 als auch L_2 sind NP-vollständig (vgl. in der Literatur: Knappsack, Partition).

Aufgabe 5
Zeigen Sie:

1. $A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \iff \overline{A} \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} \overline{B}$.
2. $(A \in \mathrm{NPC} \wedge \mathrm{NP} \neq \mathrm{co\text{-}NP}) \Longrightarrow (\{1\}\cdot A \cup \{2\}\cdot\overline{A} \notin \mathrm{NP} \ \cup\ \mathrm{co\text{-}NP})$.

Aufgabe 6
Zeigen Sie:

1. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{REC}$
2. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$
3. $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{REC}$
4. $\mathrm{CSL} \subseteq \mathrm{REC}$

Aufgabe 7
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$):

1. co-P = P .
2. $A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B \implies B \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} A$.
3. $(A \in \text{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\} \wedge B \in \text{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}) \implies A \equiv_{\text{mo}}^{\text{poly}} B$.
4. Auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet Σ ist die Relation $\leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}$ antisymmetrisch.

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass die Klassen P und NP unter Vereinigung, Schnittbildung, Konkatenation und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind.

Aufgabe 9
Zeichen Sie ein Venn-Diagramm mit den folgenden Sprachklasssen: CFL, P, NP, co-NP, REC und RE. Tragen Sie die Sprachen $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und H in dieses Venn.Diagramm ein.

Aufgabe 10
Zeigen Sie: Das Entscheidungsproblem, ob ein Graph ein Eulerkreis hat, liegt in P. Ergebnisse aus der Graphentheorie därfen benutzt werden.

Aufgabe 11
Zeigen Sie: Das Erfüllbarkeitsproblem für aussagenlogische Formeln in disjunktiverer Normalform (Disjunktion von $\wedge$-Klauseln) liegt in P.

Aufgabe 12
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$):

1. Sind A und B beide nicht-entscheidbar, so gibt es eine totale bijektive Funktion von A auf B.
2. Ist A nicht-aufzählbar, so gibt es eine totale bijektive Funktion von A auf $\overline{A}$.
3. Ist A aufzählbar und gibt es eine totale bijektive Funktion von A auf $\overline{A}$, so ist A entscheidbar.
4. Ist A aufzählbar und gibt es eine berechenbare surjektive Funktion von A auf $\overline{A}$, so ist A entscheidbar.
5. Ist A many-one reduzierbar auf eine kontextfreie Sprache, so ist A entscheidbar.
6. Ist eine kontextfreie Sprache L auf eine A many-one reduzierbar, so ist A entscheidbar.
7. Ist A regulär und B kontextfrei und beide nicht trivial, so sind sie bezüglich der polynomiellen many-one Reduktion äquivalent.

Keine Pflichtaufgabe

Fragestunde in der Vorlesungsfreien Zeit:

Voraussichtlich Di, Do 15:30 BBB im Raum der Übung, ohne Verbindlichkeit.

Bitte Fragen möglichst vorher per Mail stellen.

Gibt es keine Fragen, so fllt die Fragestunde aus!