Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 13

Besprechung in KW 04 / Abgabe in KW 05

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 9

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen kontextsensitiv sind:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^n c a^n c a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_2 &:= \{a^n c a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_2 &:= \{\mathrm{bin}(n^2) \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_4 &:= \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist Primzahl }\} \\
L_5 &:= \{\mathrm{bin}(n) \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist Primzahl }\} \\
L_6 &:= \{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\} \\
L_7 &:= \{a^n c a^m c a^k \mid n,m,k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \wedge \ k = n \cdot m\} \\
L_8 &:= \{\mathrm{bin}(n) c\, \mathrm{bin}(m) c\, \mathrm{bin}(k) \mid n,m,k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \wedge \ k = n \cdot m\}
\end{aligned}$$

$\mathrm{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen).

Hinweis: Nutzen Sie die Äquivalenz von kontextsensitiven Sprachen und Sprachen, die von linear beschränkten Automaten erkannt werden.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die kontextsensitiven Sprachen unter Vereinigung, Schnittbildung, Konkatenation und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die kontextsensitiven Sprachen und die entscheidbaren Sprachen nicht unter Homomorphismus abgeschlossen sind.

Aufgabe 4
Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\mathrm{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen):

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^n c a^m c a^k \mid n,m,k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \wedge \ k = n \cdot m\} \\
L_2 &:= \{\mathrm{bin}(n) c\, \mathrm{bin}(m) c\, \mathrm{bin}(k) \mid n,m,k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \wedge \ k = n \cdot m\}
\end{aligned}$$

Zu L_1 und L_2 betrachten wir die im Folgenden kurz beschriebenen Turing-Maschinen M_1 und M_2, welche L_1 und L_2 entscheiden: im Wesentlichen subtrahieren die Turing-Maschinen n m-mal vom Startwert k; wird dadurch genau 0 erreicht, so wird akzeptiert ansonsten verworfern. (Natürlich müssen M_1 und M_2 auch prüfen, dass die Eingabe die korrekte Form hat.)

1. Wird durch die Turing-Maschinen M_1 und M_2 bezeugt, dass L_1 und L_2 in P liegen?
2. Liegen L_1 und L_2 in P?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in P liegen:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_2 &:= \{a^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\} \\
L_3 &:= \{\mathrm{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\} \\
L_4 &:= \{a^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2^m\} \\
L_5 &:= \{\mathrm{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2^m\} \\
L_6 &:= \{wcvcu \mid w, v, u \in \{a,b\}^* \wedge (w = v \vee w = u)\} \\
L_7 &:= \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B) \implies (A \leq_{\mathrm{mo}} B)$
2. $(A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \wedge B \in \mathrm{P}) \implies A \in \mathrm{P}$
3. $(A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \wedge A \notin \mathrm{NP}) \implies B \notin \mathrm{NP}$.
4. ($A \in \mathrm{P}$ entscheidbar $\wedge\ B \neq \emptyset\ \wedge\ B \neq \{0,1\}^*$), dann ist $A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B$.
5. (A NP-vollständig $\wedge A \in \mathrm{P}$) $\implies$ ($\mathrm{P} = \mathrm{NP}$).

Aufgabe 7
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich $\leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}}$)

1. (A NP-vollständig und $A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B$ und $B \in \mathrm{NP}$) $\implies$ B NP-vollständig.
2. Keine nichtentscheidbare Sprache ist NP-vollständig.
3. Jede nicht-triviale Sprache in P ist P-vollständig.

Aufgabe 8
Welche der Eigenschaften "reflexiv", "symmetrisch", "antisymmetrisch", "transitiv" haben die Relationen $\leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}}$ bzw. $\equiv_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}}$ auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 9
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$).

1. $(A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \wedge B \in \mathrm{NP}) \implies A \in \mathrm{NP}$.
2. $(A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \wedge A \notin \mathrm{P}) \implies B \notin \mathrm{P}$.
3. $A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \iff \overline{A} \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} \overline{B}$.
4. Sind A und B NP-vollständig, so gilt $A \equiv_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B$.
5. ($\mathrm{NPC} \cap \mathrm{P} \neq \emptyset$) $\implies$ ($\mathrm{NP} = \mathrm{P}$).

Definition: [polynomial reduzierbar]:

$$\begin{aligned}
L \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{P}} L' \quad &\iff \quad L \textbf{ (many-one) polynomial reduzierbar} \text{ auf } L' \\
&:\iff \quad \exists\, f : \Sigma_L^* \to \Sigma_{L'}^* \text{ total und in polynomeller Zeit berechenbar mit} \\
&\qquad\qquad \forall w \in \Sigma_L^* : w \in L \iff f(w) \in L'
\end{aligned}$$

$$L \equiv_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{P}} L' \quad :\iff \quad (L \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{P}} L' \ \wedge\ L' \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{P}} L)$$