Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 11

Besprechung in KW 02 / Abgabe in KW 03

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 11

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Zeigen Sie: L entscheidbar $\Rightarrow \overline{L}$ entscheidbar

Aufgabe 5
Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist entscheidbar.
2. L und $\overline{L}$ sind semi-entscheidbar.
3. Es gibt eine Turingmaschine, die akzeptierend stoppt falls $x \in L$, und verwerfend stoppt, falls $x \notin L$.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare streng-monoton steigende Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder L ist endlich.
5. Die charakteristische χ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 6
Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist rekursiv aufzählbar.
2. L ist semi-entscheidbar.
3. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale injektive berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder L ist endlich.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder $L = \emptyset$.
5. $L = \text{Bild}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
6. $L = \text{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
7. Die semi-charakteristische φ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 7
Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Recherchieren Sie gegebenenfalls die Begriffe.

1. Die Menge der abzählbaren Sprachen über Σ ist überabzählbar.
2. Die Menge der aufzählbaren Sprachen über Σ ist abzählbar.

3. Es gibt nicht-aufzählbare Sprachen über Σ.

Aufgabe 8
Seien $A_1, \ldots A_n$ paarweise disjunkte, aufzählbare Teilmengen von $\{0,1\}^*$ und sei A die Vereinigung der Mengen $A_1, \ldots, A_n$. Zeigen Sie: Falls A entscheidbar ist, dann sind auch alle Mengen A_i entscheidbar $(i = 1, \ldots, n)$.

Aufgabe 9
Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für $\{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ an.

Aufgabe 10
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren $L := \{wc^i \mid w \in \Sigma^* \wedge i \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq i \leq |w|\}$. Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für L an.

Aufgabe 11
Zeigen Sie:

1. Die entscheidbaren Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung, Schnitt, Komplement und Konkatenation.
2. Die semi-entscheidbar Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung, Schnitt und Konkatenation.

Definition [(semi-)charakteristische Funktion]:
Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sind die *semi-charackteristische Funktion* φ_L und die *charakteristische Funktion* χ_L definiert durch:

- $\varphi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}^*$ mit $\varphi_L(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in L, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\chi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}^*$ mit $\chi_L(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in L, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$

Notation: Für eine Turing-Maschine M und ein Inputwort w bedeutet:

$M(w)\uparrow$	:	M angesetzt auf w stoppt nicht,
$M(w)\downarrow$	:	M angesetzt auf w stoppt,
$M(w)\downarrow v$	:	M angesetzt auf w stoppt mit Ausgabe v.