# Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

*Aufgabenblatt 1*

Besprechung in KW 42 / Abgabe in KW 43

---

**Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:**
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 13

---

**Aufgabe 1**
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

**Aufgabe 2**
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

**Aufgabe 3**
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

---

**Aufgabe 4**
Sei $Q$ die Menge der Bundesländer der Bundesrepublik Deutschland, und $K$ die Menge der Paare $(a, b) \in Q \times Q$ für die das Bundesland $a$ und das Bundesland $b$ eine gemeinsame Grenze haben. Ist die Relation $K$ reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, transitiv?

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung!

**Hinweis:** `http://de.wikipedia.org/wiki/Deutschland`

**Aufgabe 5**
Geben Sie für jede der folgenden Relationen an, welche der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch und transitiv auf sie zutreffen. Die Relationen seien jeweils über der Menge der Deutschen definiert.

1. $x$ hat den gleichen Vater wie $y$.
2. $x$ und $y$ haben ein gemeinsames Kind.
3. $x$ ist Vorfahre von $y$.

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung!

**Aufgabe 6**
Zwei Mengen $A$ und $B$ sind gleichmächtig (in Zeichen $|A| = |B|$) genau dann, wenn es eine Bijektion (total, injektiv, surjektiv) von $A$ auf $B$ gibt.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\{0, 1\}^*$ gleichmächtig sind.
3. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x\}$ und $]0; 1[ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ gleichmächtig sind.
   **Hinweis:** Denken Sie an z. B. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{x}$.
4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig sind.

Siehe auch: `https://www.youtube.com/watch?v=OxGsU8oIWjY`

**Aufgabe 7**
Sei $A$ eine Menge und $\mathcal{P}(A)$ die zugehörige Potenzmenge. Auf $\mathcal{P}(A)$ definieren wir die symetrische Differenz $\triangle$ vermöge:

$$B \triangle C := (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ eine abelsche Gruppe bildet.

**Aufgabe 8**
Sei $A := \{a, aaa\}$, $B := \{\lambda, aa, bb\}$, $C := \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ gerade }\}$.

Bestimmen Sie: $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot C$, $A \cdot A$, $B \cdot B$, $C \cdot C$, $A^*$, $B^*$, $C^*$.

**Aufgabe 9**
Sei $A$ eine beliebige Wortmenge über dem endlichen Alphabet $\Sigma$. Zeigen Sie:

1. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $A \cdot A^i = A^i \cdot A$
2. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\{\lambda\}^i = \{\lambda\}$
3. Für $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt: $\emptyset^i = \emptyset$
4. $\emptyset^* = \{\lambda\}$

**Aufgabe 10**
Seien $A$ und $B$ beliebige Teilmengen von $\{0, 1\}^*$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussagen!

1. $\emptyset = \{\emptyset\}$,
2. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
3. $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup B$,
4. $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$,
5. $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$,
6. $(A^*)^* = A^*$,
7. $(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$,
8. $(A \cdot B)^* = (A \cup B)^*$.

**Aufgabe 11**
Seien $A$ eine beliebige Teilmenge von $\{0, 1\}^*$. Zeigen Sie:

$$\lambda \in A^+ \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in A$$

**Aufgabe 12**
Auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten wir diem Relation $R$ definiert durch:

$$iRj \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall k \in \mathbb{N} \,\text{mit}\, k \,\text{Primzahl}\colon k|i \Longrightarrow k|j)$$

Welche der folgenden Eigenschaften besitzt $R$ :reflexiv, symetrisch, asymetrisch, antisymetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

---

**Aufgabe 13**
Seien $A$ und $B$ beliebige Teilmengen von $\{0, 1\}^*$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussage formal !

1. $A^+ \subseteq A^*$,
2. $(A \cap B)^* \supseteq (A^* \cap B^*)$,
3. $(A \cdot B)^* = (B \cdot A)^*$.