# Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

*Aufgabenblatt 9*

Besprechung in KW 4 / Abgabe in KW 5

---

**Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:**
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 17 und 18

---

**Aufgabe 1**
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

**Aufgabe 2**
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

**Aufgabe 3**
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

---

**Aufgabe 4**
Zeigen Sie: $L$ entscheidbar $\Rightarrow \overline{L}$ entscheidbar

**Aufgabe 5**
Sei $\Sigma$ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. $L$ ist rekursiv aufzählbar.
2. $L$ ist semi-entscheidbar.
3. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale injektive berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder $L$ ist endlich.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder $L = \emptyset$.
5. $L = \text{Bild}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
6. $L = \text{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
7. Die semi-charakteristische $\varphi_L$ Funktion von $L$ ist berechenbar.

**Aufgabe 6**
Seien $A_1, \dots A_n$ paarweise disjunkte, aufzählbare Teilmengen von $\{0,1\}^*$ und sei $A$ die Vereinigung der Mengen $A_1, \dots, A_n$. Zeigen Sie: Falls $A$ entscheidbar ist, dann sind auch alle Mengen $A_i$ entscheidbar $(i = 1, \dots, n)$.

**Aufgabe 7**
Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für $\{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ an.

**Aufgabe 8**
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren $L := \{wc^i \mid w \in \Sigma^* \wedge i \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq i \leq |w|\}$. Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für $L$ an.

**Aufgabe 9**
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist abzählbar.
2. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist abzählbar.
4. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist abzählbar.
5. Jede Obermenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.
6. Jede Obermenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.
7. Jede Teilmenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.

**Aufgabe 10**
Welche der Eigenschaften “reflexiv”, “symmetrisch”, “antisymmetrisch”, “transitiv” haben die Relationen “$\leq_{\text{mo}}$” bzw. “$\equiv_{\text{mo}}$” auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

**Aufgabe 11**
Sind folgende Funktionen $f : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$ Reduktionen von $L_1$ auf $L_2$ ($L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$)?

1. $f(w) := (w\overleftarrow{w})^2$,
   $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$,
2. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$,
   $L_1 := \{(aba)^{3n} \in \{a,b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 6 \text{ teilt } \#_b(w)\}$

**Aufgabe 12**
Zeigen Sie: ($\Sigma$ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $\neg(\overline{H_1} \leq_{\text{mo}} H_1)$
2. Es gibt eine Sprache $L$, so daß weder die Sprache $L$ noch ihr Komplement $\overline{L}$ aufzählbar sind.
3. Sind $A$ und $B$ RE-vollständig, so gilt $A \equiv_{\text{mo}} B$.

**Aufgabe 13**
Zeigen sie, dass die folgenden Sprachen nicht entscheidbar sind, indem Sie $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}$ auf diese Sprachen reduzieren:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v\ (010)\downarrow\} \\
L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } |L(M_v)| = \infty\ \} \\
L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt immer}\}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 14**
Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

$L_1 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine gerade Anzahl von Zuständen}\}$

$L_2 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von } \lambda \text{ wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\}$

**Aufgabe 15**
Zeigen Sie: ($\Sigma$ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $\neg(\overline{H_1} \leq_{\text{mo}} H_1)$
2. Es gibt eine Sprache $L$, so daß weder die Sprache $L$ noch ihr Komplement $\overline{L}$ aufzählbar sind.
3. Sind $A$ und $B$ RE-vollständig, so gilt $A \equiv_{\text{mo}} B$.

**Aufgabe 16**
Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

$L_1 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine gerade Anzahl von Zuständen}\}$

$L_2 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von } \lambda \text{ wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\}$

**Aufgabe 17**
Geben Sie berechenbare Funktionen $f_1$, $f_2$, $f_3$ und $f_4$ aus $\Sigma^*$ nach $\Sigma^*$ an, die folgende Eigenschaften haben:

1. $\mathrm{Def}(f_1)$ nicht-entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_1)$ entscheidbar.
2. $\mathrm{Def}(f_2)$ nicht-entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_2)$ nicht-entscheidbar.
3. $\mathrm{Def}(f_3)$ entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_3)$ nicht-entscheidbar.
4. $\mathrm{Def}(f_4)$ entscheidbar und $\mathrm{Bild}(f_4)$ entscheidbar.

Begründen Sie jeweils, weshalb die geforderten Eigenschaften erfüllt werden.

**Aufgabe 18**
Sind folgende Funktionen $f : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$ Reduktionen von $L_1$ auf $L_2$ ($L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$)?

1. $f(w) := (w\overleftarrow{w})^2$,
   $L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$,
2. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$,
   $L_1 := \{(aba)^{3n} \in \{a,b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a,b\}^* \mid 6 \text{ teilt } \#_b(w)\}$

---

**Definition [(semi-)charakteristische Funktion]:**
Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sind die *semi-charackteristische Funktion* $\varphi_L$ und die *charakteristische Funktion* $\chi_L$ definiert durch:

- $\varphi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}^* \quad \text{mit} \quad \varphi_L(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in L, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\chi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}^* \quad \text{mit} \quad \chi_L(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in L, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$

**Definition: [reduzierbar]:**

$$
\begin{array}{lll}
LL' & \iff & L \textbf{ (many-one) reduzierbar} \text{ auf } L' \\
 & :\iff & \exists\, f : \Sigma_L^* \to \Sigma_{L'}^* \text{ total und berechenbar mit} \\
 & & \qquad\qquad \forall w \in \Sigma_L^* : w \in L \iff f(w) \in L' \\
L \equiv_{\mathrm{mo}} L' & :\iff & (L \leq_{\mathrm{mo}} L' \;\wedge\; L' \leq_{\mathrm{mo}} L)
\end{array}
$$

**Definition: [vollständig]:**
Für eine Sprachklasse $\mathcal{L}$ heisst eine Sprache $A$ **$\mathcal{L}$-vollständig** bzgl. der Reduktion $\leq_m$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{L}$ und $\forall L \in \mathcal{L} : L \leq_{\mathrm{mo}} A$.

**Notation:** Für eine Turing-Maschine $M$ und ein Inputwort $w$ bedeutet:

$$
\begin{array}{lll}
M(w)\uparrow & : & M \text{ angesetzt auf } w \text{ stoppt nicht,} \\
M(w)\downarrow & : & M \text{ angesetzt auf } w \text{ stoppt,} \\
M(w)\downarrow v & : & M \text{ angesetzt auf } w \text{ stoppt mit Ausgabe } v. \\
H & := & \{\langle u,v\rangle \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(v)\downarrow\} \\
H_1 & := & \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u)\downarrow\}
\end{array}
$$

---