Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Besprechung in KW 51 / Abgabe in KW 2

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13 und 14

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Wir betrachten die Trägermenge A und binäre Relationen R und S auf A (also $R, S \subseteq A \times A$). Wir definieren die Verknüpfung $\circ$ auf Menge der binären Relationen auf A vermöge $R \circ S := \{(x, y) \mid \exists z \in A : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$. Weiterhin definieren wir $R^0 := \mathrm{id}_A$ sowie $R^{i+1} := R^i \circ R$ für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Schließlich $R^* := \cup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} R^i$. Zeigen Sie:

1. Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ auf der Menge der binären Relationen über A.
   [Zusatzfrage: Ist dies von Bedeutung im Hinblick auf die Definition von R^i?]
2. R^* ist reflexiv und transitiv.
3. R^* ist die kleinste reflexiv-transitive Relation, die R umfasst.
4. Ist $\mathcal{R}$ die Menge aller reflexiv-transitive Relationen, die R umfassen, so gilt: $R^* = \cap_{S \in \mathcal{R}} S$.

Aufgabe 5
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie Grammatiken für folgende Sprachen über Σ an

$$\emptyset,\ \{\lambda\},\ \emptyset^*,\ \{\lambda\}^*,\ \{a, b, c\}^*,\ \{a, b\}^+,\ \{a, b, c\},\ \{abc\},\ \{a, b, c\}^3$$

Aufgabe 6
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
&L_1 := \{a^{2n} c b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&L_2 := \{w \in \{a, b, c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\} \\
&L_3 := \{wv \mid v \in \{c\}^*,\ w \in \{a, b\}^*,\ |w| = |v|\} \\
&L_4 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\} \\
&L_5 := L_1 \cup L_2 \\
&L_6 := L_3 \cdot L_4
\end{aligned}$$

Aufgabe 7
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines deterministischen finiten Automaten A feststellt, ob das Komplement der erkannten Sprachen $L(A)$ unendlich ist.

Aufgabe 8
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe zweier nichtdeterministischer finiter Automaten A_1 und A_2 feststellt, ob die erkannten Sprachen $L(A_1)$ und $L(A_2)$ gleich sind.

Aufgabe 9
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man zu einem regulären Ausdruck α über einem Alphabet Σ einen regulären Ausdruck für $\overline{\mathcal{L}(\alpha)} = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\alpha)$ erzeugen kann.

Aufgabe 10
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines nichtdeterministischer finiten Automaten A feststellt, ob die erkannte Sprachen $L(A)$ leer, endlich oder unendlich ist.

Aufgabe 11
Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bbaab \text{ nicht}\} \\
L_2 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \lor \#_b(w) \bmod 3 = 0\} \\
L_3 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \land \#_b(w) \bmod 3 = 0\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 12 (für gute Studierende)
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache über $\Sigma = \{a\}$. Zeigen Sie, dass L^* regulär

---

Aufgabe 13
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \text{ , } i \neq j\} \\
L_2 &:= \{wcvc\overleftarrow{w} \mid w, v \in \{a,b\}^+\} \\
L_3 &:= \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 14
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $L \supseteq h^{-1}(h(L))$
