Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 5

Besprechung in KW 50 / Abgabe in KW 51

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 14 und 15

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Wir betrachten eine DFA M. Die zu M gehörige Relation $\sim_M$ auf $\{a,b\}^*$ ist gegeben durch die zu ihr gehörende Klasseneinteilung:
$\{\{\lambda\},\{a\},\{b\},\{aa\},\{ab\},\{ba,bb\},\{aaw \mid w\in\{a,b\}^+\},\{abw \mid w \in \{a,b\}^+\},\{bxw \mid x\in\{a,b\}, w\in\{a,b\}^+\}\}$.

Weiterhin erkenne M keine Wörter mit Länge kleiner 3, ebenso nicht das Wort $(ab)^{42}$. Die Wörter a^{42} und b^{42} hingegen werden erkannt.

Geben Sie den Automaten M an, bestimmen Sie den äquivalenten minimalen Automatem und beschreiben Sie die lassen von $\approx_{L(M)}$ mit regulärer Ausdrücken.

Aufgabe 5
Erkennen die beiden finiten Automaten $M_1 = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\,,\,\{a,b\}\,,\ \delta_1\,,\,0\,,\,\{4,5,6\})$ und $M_2 = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\,,\,\{a,b\}\,,\ \delta_2\,,\,0\,,\,\{2,5\})$ die gleiche Sprache? δ_1 und δ_2 sind gegeben durch:

δ_1	a	b
0	2	1
1	2	3
2	4	7
3	2	3
4	0	5
5	1	6
6	0	5
7	5	2

δ_2	a	b
0	1	3
1	2	6
2	3	2
3	4	0
4	5	7
5	0	5
6	2	1
7	5	7

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $\$ \notin \Sigma$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur unendlich große Klassen hat.
2. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat und L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt wird.
3. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Obermenge $L' \supseteq L$.
4. Werden L und L' von DFA erkannt, so auch $(\{a\} \cdot L) \cup (\{b\} \cdot L')$.
5. Wird L von einem DFA erkannt und wird L' von keinem DFA erkannt, so wird $L \cap L'$ auch von keinem DFA erkannt.
6. Ist $L \cdot \{\$\}$ regulär, so ist auch L regulär.
7. Jede co-endliche Sprache ist regulär.
8. Ist $L \cup L'$ regulär, so sind auch L und L' regulär.
9. Ist $L \cdot L'$ regulär, so sind auch L und L' regulär.
10. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.
11. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle endlich, so ist $\cap_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch endlich.

Aufgabe 7
Welche Sprachen werden von den folgenden finiten Automaten A_k und B_k mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ erkannt?

$$
\begin{aligned}
A_k &:= (\{0, \ldots, k\}\,,\ \{a, b\}\,,\ 0\,,\ \Delta_k\,,\ \{k\}) \text{ und} \\
B_k &:= (\{a, b\}^k\,,\ \{a, b\}\,,\ b^k\,,\ \Delta'_k\,,\ \{a\} \cdot \{a, b\}^{k-1})
\end{aligned}
$$

wobei:

$$
\begin{aligned}
\Delta_k &:= \{(0, a, 0), (0, b, 0), (0, a, 1)\} \quad \cup \quad \{(i, x, i{+}1) \mid i \in \{1, \ldots, k-1\} \wedge x \in \{a, b\}\} \\
\Delta'_k &:= \{(xw, y, wy) \ \mid x, y \in \{a, b\} \wedge w \in \{a, b\}^{k-1}\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8
Sei $L_k := \{w \in \{a, b\}^+ \mid \text{das } k\text{-letzte Zeichen von } w \text{ ist } a\}$ für $k \in N \setminus \{0\}$. Zeigen Sie für jedes $k \in N \setminus \{0\}$:

1. Es gibt einen NFA mit $k + 1$ Zuständen, der L_k erkennt.
2. Kein vollständiger DFA mit weniger als 2^k Zustände erkennt L_k.
   Hinweis: Denken Sie an die zu L_k gehörende Relation $\approx_{L_k}$.
3. Es gibt einen vollständigen DFA mit 2^k Zuständen, der L_k erkennt.

Hinweis: Denken Sie an Aufgabe **??**.

Aufgabe 9
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie: Entweder wird L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt oder alle Klassen der zu L gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ sind einelementig.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\forall p, q \in \mathbb{N} : a^p \approx_L a^{p+q} \implies \{a^{p+iq} \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq [a^p]_{\approx_L}$

Aufgabe 10

Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus (bezüglich der Konkatenation). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$
7. $h(L \cdot R) = h(L) \cdot h(R)$
8. $h(L \cdot R) = h(L) \cup h(R)$

Hinweis: Außer bei den Teilaufgaben 7 und 8 wird die Homomorphieeigenschaft nicht gebraucht. Die Teilaufgaben benötigen nur, dass h eine totale Funktion ist.

Aufgabe 11

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^* mit:

$$h(a) = ab \qquad g(a) = a$$
$$h(b) = ba \qquad g(b) = c$$
$$h(c) = ccc \qquad g(c) = \lambda$$

1. Geben Sie $h(L)$, $g(L)$, $h^{-1}(L)$ und $g^{-1}(L)$ für folgende Sprachen L_i an $(i = 1, 2, 3)$:

$$L_1 := \{acccaa, ababba, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad L_3 := \{wccc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	5	6	7	8
a	$2, 5$	5	–	–	–	7
b	–	2	2	–	–	–
c	–	6	–	7	$7, 8$	8

Konstruieren Sie NFAs die $h(L(M))$, $g(L(M))$, $h^{-1}(L(M))$ und $g^{-1}(L(M))$ erkennen.

Aufgabe 12

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ L und R reguläre Sprachen über Σ sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^*. Zeigen Sie, dass dann auch $g\left(h^{-1}(L) \cap R\right)$ regulär ist. [Sie dürfen selbstverständlich die in der Vorlesung gezeigten Sätze benutzen.]

Aufgabe 13

Beweisen Sie mit Hilfe von endlichen Automaten, dass die regulären Sprachen unter Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind. Verwenden Sie im Beweis weder reguläre Ausdrücke noch Grammatiken.

Hinweis: Sei h ein Homomorphismus. Angenommen, L werde vom deterministischen endlichen Automaten M erkannt. Wir erhalten einen endlichen Automaten für $h(L)$, wenn vom Zustand p mit dem Zeichen a in den Zustand q übergegangen wird, der beim Automaten M von p aus mit $h(a)$ erreicht wird. Umgekehrt erhalten wir einen endlichen Automaten für $h^{-1}(L)$, wenn es von p aus einen Pfad für $h(a)$ nach q gibt, falls von p mit a nach q übergegangen wird.

Definition: $h(L) := \{h(x) \mid x \in L\}$, $h^{-1}(L) := \{x \mid h(x) \in L\}$.

Aufgabe 14

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $M = (Q, \Sigma, \delta, (0,0), F)$ ein deterministischer endlicher Automat mit

$$Q = \{(i,j) \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq j \leq 2\} \ ,$$
$$\delta = \{(i,j), a, (i+1 \bmod 2 \ , \ j \ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid \ i \leq 1 \ , \ j \leq 2 \ \}$$
$$\cup\{(i,j), b, (i \ , \ j+1 \bmod 3 \ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid \ i \leq 1 \ , \ j \leq 2\}$$
$$\cup\{(i,j), c, (i \ , \ j-1 \bmod 3 \ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid \ i \leq 1 \ , \ j \leq 2\} \text{ , und}$$
$$F = \{(0,0)\}.$$

Welche der folgenden Wörtern $abc, aabcc, aa, aabcb, aababaaa$ werden von M akzeptiert? Beschreiben Sie die von M erkannte Sprache. Begründen sie Ihre Antwort.

Aufgabe 15

Wir betrachten die Sprache L_1:

$$L_1 \quad := \quad L((a \cup b)^* \cdot (aa \cup bb) \cdot (a \cup b)^*) \ \cup \ \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\}$$

1. Zeigen Sie, die Sprache L_1 die reguläre Pumpingeigenschaft hat.
2. Zeigen Sie, dass die Sprachen L_1 nicht regulär ist.