Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 3

Besprechung in KW 48 / Abgabe in KW 49

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13 und 14

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Sei $K = \{q_1, \dots, q_n\}$ und $M = (K, \Sigma, \delta, q_1, \{q_n\})$ ein NFA. Wir benutzen die Definitionen von $R(i, j, k)$ aus der Vorlesung. Zeigen Sie mit Hilfe der in Vorlesung bewiesenen Gleichung

$$R(i,j,k) = R(i,j,k-1) \cup R(i,k,k-1) \cdot (R(k,k,k-1))^* \cdot R(k,j,k-1)$$

die folgenden Aussagen:

1. $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ \ \forall k \in \{0, \dots, n\} :\ \lambda \in R(i,i,k)$
2. $\forall i, k \in \{1, \dots, n\}\ :\ R(i,k,k) = R(i,k,k-1) \cdot (R(k,k,k-1))^*$
3. $\forall i, k \in \{1, \dots, n\}\ :\ R(k,i,k) = (R(k,k,k-1))^* \cdot R(k,i,k-1)$
4. $\forall k \in \{1, \dots, n\}\ :\ R(k,k,k) = (R(k,k,k-1))^*$

Aufgabe 5
Geben Sie reguläre Ausdrücke zu den von den Automaten aus Aufgabe 9 von Blatt 2 erkannten Sprachen an.
Hinweis: Nutzen Sie das in der Vorlesung vorgestellte sytematische Verfahren, sowie die vorstehende Aufgabe.

Aufgabe 6
Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie:

1. Jede endliche Sprache über Σ wird durch einen finiten Automaten erkannt.
2. Jede endliche Sprache über Σ wird durch einen regulären Ausdruck beschrieben.
3. Jede co-endliche Sprache über Σ wird durch einen finiten Automaten erkannt.
4. Jede co-endliche Sprache über Σ wird durch einen regulären Ausdruck beschrieben.

Definition: Eine Sprache über Σ heißt *co-endlich* genau dann, wenn ihr Komplement endlich ist.

Aufgabe 7
Kann man die reguläre Pumping-Eigenschaft wie folgt abändern?

1. "($\forall w \in L$ mit $|w| \geq k$)" durch "($\forall w \in L$)" ersetzen.
2. "($\forall i \in \mathbb{N}$)" durch "($\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)" ersetzen.
3. "($\forall w \in L$ mit $|w| \geq k$)" durch "($\forall w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq k$)" ersetzen.
4. Die Bedingung "$v \neq \lambda$" weglassen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 8
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen L_i über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{array}{lcl} L_1 & := & \{w \in \{a,b\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^5\} \\ L_2 & := & \{wcw \mid w \in \{a,b\}^+\} \\ L_3 & := & \{a^{4n}b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_3 & := & \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \text{ ist Primzahl}\} \end{array}$$

Aufgabe 9
Zeigen Sie, dass $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa$ ist Teilwort von w oder bb ist Teilwort von w oder $|w|$ ist eine Kubikzahl$\}$ die reguläre Pumpingeigenschaft hat, aber nicht regulär ist.
Hinweis: Betrachten Sie $L \cap L((ab)^*)$.

Aufgabe 10
.Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Eine Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ist eine *Rechtskongruenzrelationen* auf $(\Sigma^*, \cdot)$ genau dann wenn R eine Äquivalenzrelation auf Σ^* ist und zusätzlich gilt:

$$\forall x, y \in \Sigma^* \quad : \quad xRy \Longrightarrow (\forall z \in \Sigma^* : x \cdot z \; R \; y \cdot z)$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Relationen Rechtskongruenzrelationen auf $(\Sigma^*, \cdot)$ sind oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1. $wR_1v :\Leftrightarrow$ in w kommen genau soviele a vor wie in v.
2. $wR_2v :\Leftrightarrow$ es gibt ein Zeichen aus Σ, das in w genau so oft vorkommt wie in v.

Aufgabe 11
Sind die folgenden Relationen R und S Rechtskongruenzrelationen auf $(\{a,b\}^*, \cdot)$?

1. Die Relation R auf $\{a,b\}^*$ ist gegeben durch die zu ihr gehörende Klasseneinteilung: $\{\{\lambda\}, \{a\}, \{b\}, \{aa, ba, ab, bb\}, \{aaw \mid w \in \{a,b\}^+\}, \{abw \mid w \in \{a,b\}^+\}, \{bxw \mid x \in \{a,b\}, w \in \{a,b\}^+\}\}$.
2. Die Relation S auf $\{a,b\}^*$ ist gegeben durch die zu ihr gehörende Klasseneinteilung: $\{\{\lambda\}, \{a\}, \{b\}, \{aa\}, \{ab\}, \{ba, bb\}, \{aaw \mid w \in \{a,b\}^+\}, \{abw \mid w \in \{a,b\}^+\}, \{bxw \mid x \in \{a,b\}, w \in \{a,b\}^+\}\}$.

Bemerkung: Rechtskongruenzen spielen im Verlauf der nächsten Vorlesungen eine wichtige Rolle. Deshalb ist es sinnvoll, sich vorher mit dem Begriff vertraut zu machen.

Aufgabe 12
Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definieren wir die Relation $\mathcal{R}$ vermöge:

$$x\mathcal{R}y \;:\Longleftrightarrow x \equiv y \bmod k$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ eine Rechtskongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, +)$ und auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.

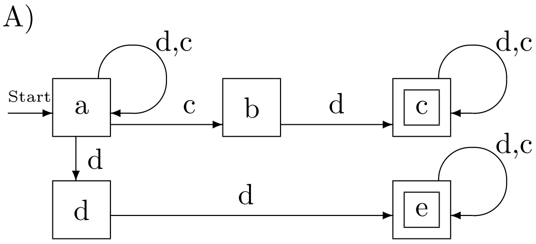
Aufgabe 13
Entscheiden Sie, ob die folgenden Relationen Rechtskongruenzrelationen auf $(\Sigma^*, \cdot)$ sind oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1. wR_3v :⇔ alle Zeichen, welche in w vorkommen, kommen auch in v vor.
2. wR_4v :⇔ alle Zeichen, welche in w vorkommen, und nur diese, kommen in v vor.

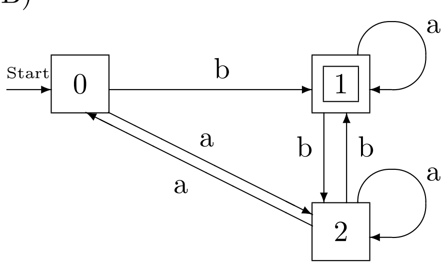
Definition: Ein Zeichen $x \in \Sigma$ kommt in $w \in \Sigma^*$ vor gdw. $\exists w', w''$ mit $w = w' \cdot x \cdot w''$.

Aufgabe 14
Gegeben seien die folgenden finiten Automaten (der Startzustand s ist durch "Start" gekennzeichnet, die akzeptierenden Zustände durch die doppelte Einrahmung).Geben Sie reguläre Ausdrücke zur erkannten Sprache an.
Konstruieren Sie äquivalente, vollständige, deterministische finite Automaten zu den folgenden Automaten.

A)



B)



Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.