Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 7

Besprechung in KW 48 / Abgabe in KW 49

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13, 14 und 15

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit Hilfe von endlichen Automaten, dass die regulären Sprachen unter Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind. Verwenden Sie im Beweis weder reguläre Ausdrücke noch Grammatiken.

Hinweis: Sei h ein Homomorphismus. Angenommen, L werde vom deterministischen endlichen Automaten M erkannt. Wir erhalten einen endlichen Automaten für $h(L)$, wenn vom Zustand p mit dem Zeichen a in den Zustand q übergegangen wird, der beim Automaten M von p aus mit $h(a)$ erreicht wird. Umgekehrt erhalten wir einen endlichen Automaten für $h^{-1}(L)$, wenn es von p aus einen Pfad für $h(a)$ nach q gibt, falls von p mit a nach q übergegangen wird.

Definition: $h(L) := \{h(x) \mid x \in L\}$, $h^{-1}(L) := \{x \mid h(x) \in L\}$

Aufgabe 5

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie Grammatiken für folgende Sprachen über Σ an

$$\emptyset,\ \{\lambda\},\ \emptyset^*,\ \{\lambda\}^*,\ \{a,b,c\}^*,\ \{a,b\}^+,\ \{a,b,c\},\ \{abc\},\ \{a,b,c\}^3$$

Aufgabe 6

Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^{2n}cb^n \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_2 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\}\\
L_3 &:= \{wv \mid v \in \{c\}^*,\ w \in \{a,b\}^*,\ |w| = |v|\}\\
L_4 &:= \{a^ib^j \mid i,j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\}\\
L_5 &:= L_1 \cup L_2\\
L_6 &:= L_3 \cdot L_4
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines deterministischen finiten Automaten A feststellt, ob das Komplement der erkannten Sprachen $L(A)$ unendlich ist.

Aufgabe 8
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe zweier nichtdeterministischer finiter Automaten A_1 und A_2 feststellt, ob die erkannten Sprachen $L(A_1)$ und $L(A_2)$ gleich sind.

Aufgabe 9
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man zu einem regulären Ausdruck α über einem Alphabet Σ einen regulären Ausdruck für $\overline{\mathcal{L}(\alpha)} = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\alpha)$ erzeugen kann.

Aufgabe 10
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines nichtdeterministischer finiten Automaten A feststellt, ob die erkannte Sprachen $L(A)$ leer, endlich oder unendlich ist.

Aufgabe 11
Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{array}{lcl} L_1 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bbaab \text{ nicht}\} \\ L_2 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \vee \#_b(w) \bmod 3 = 0\} \\ L_3 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) \bmod 3 = 0\} \end{array}$$

Aufgabe 12 (für gute Studierende)
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache über $\Sigma = \{a\}$. Zeigen Sie, dass L^* regulär

---

Aufgabe 13
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{array}{l} L_1 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i \neq j\} \\ L_2 := \{wcvc\overleftarrow{w} \mid w, v \in \{a,b\}^+\} \\ L_3 := \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

Aufgabe 14
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$

Aufgabe 15
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten einen deterministischen vollständigen endlichen Automaten $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$. Die zu M gehörende Rechtskongruenzrelation $\sim_M$ auf Σ^* habe als Äquivalenzklassen:

$$\{\lambda\}, \{a\}, \{b\}, \{aa\}, \{ab, ba\}, \{bb\}, \{bb\}\cdot\Sigma^{\geq 1}, \{ba, ab\}\cdot\Sigma^+,$$
$$\{aa\}\cdot\{w \in \Sigma^+ \mid |w| \text{ gerade}\}, \{aa\}\cdot\{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ungerade}\}$$

Weiterhin akzeptiert M u.a. die Wörter b^0, a^1, b^2, ba sowie a^{4711}, und M verwirft u.a. die Wörter b, aa, b^{21}, bab sowie a^{42}.

1. Bestimmen Sie δ, s und F des Automaten M. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise. Geben Sie auch eine graphische Darstellung des Automaten an.
2. Bestimmen Sie die Klassen der zu $L(M)$ gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L(M)}$ auf Σ^*. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.
