Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Besprechung in KW 47 / Abgabe in KW 48

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13, 14 und 15

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

Aufgabe 4
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $\$ \notin \Sigma$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur unendlich große Klassen hat.
2. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat und L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt wird.
3. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Obermenge $L' \supseteq L$.
4. Werden L und L' von DFA erkannt, so auch $(\{a\} \cdot L) \cup (\{b\} \cdot L')$.
5. Wird L von einem DFA erkannt und wird L' von keinem DFA erkannt, so wird $L \cap L'$ auch von keinem DFA erkannt.
6. Ist $L \cdot \{\$\}$ regulär, so ist auch L regulär.
7. Jede co-endliche Sprache ist regulär.
8. Ist $L \cup L'$ regulär, so sind auch L und L' regulär.
9. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cap_{i\in\mathbb{N}} L_i$ auch regulär.
10. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle endlich, so ist $\cup_{i\in\mathbb{N}} L_i$ auch endlich.

Aufgabe 5
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $\alpha = (a \cup aba)^* \cdot a$ ein regulärer Ausdruck über Σ und $L = \mathcal{L}(\alpha)$. Konstruieren Sie ein λ-NFA zu L, einen DFA zu L, einen DFA zu $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ sowie einen regulären Ausdruck zu $\overline{L}$. Beschreiben Sie das Konstruktionsverfahren.

Aufgabe 6
Seien $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ und $M'' = (Q'', \Sigma, \delta'', q_0'', F'')$ zwei NFA mit $Q' \cap Q'' = \emptyset$. Wir konstruieren den NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0', F)$ mit $Q = Q' \cup Q'' \setminus \{q_0''\}$, $\delta = \delta' \cup \{(f(q), a, f(p)) \mid (q, a, p) \in \delta''\}$, $F = F' \cup \{f(q) \mid q \in F''\}$, wobei

$$f : Q'' \longrightarrow Q''\setminus\{q_0''\} \cup \{q_0'\} \quad \text{mit} \quad f(q) = \begin{cases} q & \text{falls} \quad q \neq q_0'', \\ q_0' & \text{falls} \quad q = q_0'' \end{cases}$$

(Die beiden Startzustände werden identifiziert.)
Erkennt im Allgemeinen M die Sprache $L(M') \cup L(M'')$?

Aufgabe 7

Welche Sprachen werden von den folgenden finiten Automaten A_k und B_k mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ erkannt?

$$A_k := (\{0, \ldots, k\}\,,\ \{a, b\}\,,\ 0\,,\ \Delta_k\,,\ \{k\}) \text{ und}$$
$$B_k := (\{a, b\}^k\,,\ \{a, b\}\,,\ b^k\,,\ \Delta'_k\,,\ \{a\}\cdot\{a, b\}^{k-1})$$

wobei:

$$\Delta_k := \{(0, a, 0), (0, b, 0), (0, a, 1)\} \ \cup\ \{(i, x, i+1) \mid i \in \{1, \ldots, k-1\} \wedge x \in \{a, b\}\}$$
$$\Delta'_k := \{(xw, y, wy)\ \mid x, y \in \{a, b\} \wedge w \in \{a, b\}^{k-1}\}$$

Aufgabe 8

Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie: Entweder wird L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt oder alle Klassen der zu L gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ sind einelementig.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\forall p, q \in \mathbb{N} : a^p \ \approx_L\ a^{p+q} \implies \{a^{p+iq} \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq [a^p]_{\approx_L}$

Aufgabe 9

Wir betrachten die Sprachen L_2, L_3 und L_4:

$$\begin{array}{lcl} L_2 & := & \{w \in \{a, b, c\}^* \mid\ w \text{ enthält weniger } a\text{'s als } b\text{'s}\} \\ L_3 & := & \{w \in \{a\}^* \mid |w| \text{ ist eine Quadratzahl oder } |w| \text{ ist eine Kubikzahl}\} \\ L_4 & := & \{w \in \{a\}^* \mid\ |w| \text{ ist keine Primzahl}\} \end{array}$$

Zeigen Sie, dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 nicht regulär sind.

Aufgabe 10

Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus (bezüglich der Konkatenation). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$
7. $h(L \cdot R) = h(L) \cdot h(R)$
8. $h(L \cdot R) = h(L) \cup h(R)$

Hinweis: Außer bei den Teilaufgaben 7 und 8 wird die Homomorphieeigenschaft nicht gebraucht. Die Teilaufgaben benötigen nur, dass h eine totale Funktion ist.

Aufgabe 11

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^* mit:
$$\begin{array}{ll} h(a) = ab & g(a) = a \\ h(b) = ba & g(b) = c \\ h(c) = ccc & g(c) = \lambda \end{array}$$

1. Geben Sie $h(L)$, $g(L)$, $h^{-1}(L)$ und $g^{-1}(L)$ für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):

   $$L_1 := \{acccaa, ababba, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in N\}, \quad L_3 := \{wccc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	5	6	7	8
a	2, 5	5	–	–	–	7
b	–	2	2	–	–	–
c	–	6	–	7	7, 8	8

   Konstruieren Sie NFAs die $h(L(M))$, $g(L(M))$, $h^{-1}(L(M))$ und $g^{-1}(L(M))$ erkennen.

Aufgabe 12
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ L und R reguläre Sprachen über Σ sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^*. Zeigen Sie, dass dann auch $g\left(h^{-1}(L) \cap R\right)$ regulär ist. [Sie dürfen selbstverständlich die in der Vorlesung gezeigten Sätze benutzen.]

Aufgabe 13
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $M = (Q, \Sigma, \delta, (0, 0), F)$ ein deterministischer endlicher Automat mit

$$\begin{aligned}
Q &= \{(i, j) \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq j \leq 2\}\ , \\
\delta &= \{(i, j), a, (i + 1 \bmod 2\ ,\ j\ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid\ i \leq 1\ ,\ j \leq 2\ \} \\
&\quad \cup \{(i, j), b, (i\ ,\ j + 1 \bmod 3\ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid\ i \leq 1\ ,\ j \leq 2\} \\
&\quad \cup \{(i, j), c, (i\ ,\ j - 1 \bmod 3\ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid\ i \leq 1\ ,\ j \leq 2\}\ , \text{ und} \\
F &= \{(0, 0)\}.
\end{aligned}$$

Welche der folgenden Wörtern $abc, aabcc, aa, aabcb, aababaaa$ werden von M akzeptiert? Beschreiben Sie die von M erkannte Sprache. Begründen sie Ihre Antwort.

Aufgabe 14
Wir betrachten die Sprache L_1:

$$L_1 \ := \ L((a \cup b)^* \cdot (aa \cup bb) \cdot (a \cup b)^*) \ \cup \ \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\}$$

1. Zeigen Sie, die Sprache L_1 die reguläre Pumpingeigenschaft hat.
2. Zeigen Sie, dass die Sprachen L_1 nicht regulär ist.

Aufgabe 15
Sei $L_k := \{w \in \{a, b\}^+ \mid \text{das } k\text{-letzte Zeichen von } w \text{ ist } a\}$ für $k \in N \setminus \{0\}$. Zeigen Sie für jedes $k \in N \setminus \{0\}$:

1. Es gibt einen NFA mit $k + 1$ Zuständen, der L_k erkennt.
2. Kein vollständiger DFA mit weniger als 2^k Zustände erkennt L_k.
   Hinweis: Denken Sie an die zu L_k gehörende Relation $\approx_{L_k}$.
3. Es gibt einen vollständigen DFA mit 2^k Zuständen, der L_k erkennt.

Hinweis: Denken Sie an Aufgabe 7.
