Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 5

Besprechung in KW 46 / Abgabe in KW 47

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 15, 16 und 17

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

Aufgabe 4
Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ. Zeigen Sie:

$$\exists k \in N \;\; \forall A \in \mathcal{P}(L) \text{ mit } |A| > k \;\; \exists w, w' \in A \;\; \exists x, x', y, y' \in \Sigma^* \text{ so, dass}$$
$$w \neq w' \;\wedge\; w = x \cdot y \wedge w' = x' \cdot y' \;\wedge\; |x| = \lfloor |w|/2 \rfloor \wedge |x'| = \lfloor |w'|/2 \rfloor \;\wedge\; x \cdot y' \in L \wedge x' \cdot y \in L$$

Hinweis: Betrachten Sie die Läufe eines erkennenden DFA. $\mathcal{P}(L)$ bezeichnet die Potenzmenge von L.

Aufgabe 5
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

1. $(A)^+ = A^* \setminus \{\lambda\}$.
2. $(A)^* = A^+ \cup \{\lambda\}$.
3. Sind A und B regulär, so ist auch $A \setminus B$ regulär.
4. Sind A und B regulär pumpbar, so ist auch $A \cup B$ regulär.
5. Ist A regulär und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär.
6. Jede endliche Sprache hat die reguläre Pumping-Eigenschaft.

Aufgabe 6
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $\alpha = (a \cup aba)^* \cdot a$ ein regulärer Ausdruck über Σ und $L = \mathcal{L}(\alpha)$. Konstruieren Sie ein λ-NFA zu L, einen DFA zu L, einen DFA zu $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ sowie einen regulären Ausdruck zu $\overline{L}$. Beschreiben Sie das Konstruktionsverfahren.

Aufgabe 7
Zeigen Sie, dass die Sprachen $L_{\text{PAL}} := \{w \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ und $L_{\text{COPY}} := \{w \cdot w \mid w \in \{a,b\}^*\}$ nicht regulär sind.

Aufgabe 8
Erkennen die beiden finiten Automaten $M_1 = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \{a,b\}, \delta_1, 0, \{4,5,6\})$ und $M_2 = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \{a,b\}, \delta_2, 0, \{2,5\})$ die gleiche Sprache? δ_1 und δ_2 sind gegeben durch:

δ_1	a	b
0	2	1
1	2	3
2	4	7
3	2	3
4	0	5
5	1	6
6	0	5
7	5	2

δ_2	a	b
0	1	3
1	2	6
2	3	2
3	4	0
4	5	7
5	0	5
6	2	1
7	5	7

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9
Sei $L := \{a^n b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

1. Die Wörter aus $\{a\}^*$ sind paarweise nicht äquivalent (bzgl. $\approx_L$).
2. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
3. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^{i+1}b^{2i+3}] = \{a^j b^l \mid j,l \in N \wedge l > 0 \wedge 3j - l = i\}$.
4. $\Sigma^*/\approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{[a^{i+1}b^{2i+3}] \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \{[b]\}$.

Hinweis: $\Sigma^*/\approx_L$ bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen von $\approx_L$ auf Σ^*.

Aufgabe 10
Sei $\Sigma = \{a,b,c\}$ ein Alphabet. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_0 &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_1 &:= \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &= \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 11
Sei $n_0 := 0$ und $n_{i+1} := n_i + 2i + 1$ für $i \in \mathbb{N}$, weiter sei $Q := \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Sprache $L := \{a^j \mid j \in Q\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$, sowie die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$. Zeigen Sie:

1. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
2. $\Sigma^*/\approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\}$.
3. $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 12
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{a\}$. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_{21} &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 5\} \\ L_{22} &:= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{23} &:= \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \wedge p \text{ ist Primzahl}\} \\ L_{24} &:= \{a^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{25} &:= \{(a^2)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 13
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen die reguläre Pumping-Eigenschaft haben, jedoch nicht regulär sind.

$L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aa, ab, ba$ oder bb ist Teilwort von w oder w enthält genau so viele a's wie b's$\}$
$L_3 := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa$ ist Teilwort von w oder bb ist Teilwort von w oder $|w|$ ist eine Quadratzahl$\}$
$L_4 := L((a \cup b)^* \cdot (aa \cup bb) \cdot (a \cup b)^*) \ \cup \ \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|$ ist Primzahl$\}$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die zur Sprache gehörende Relation jeweils unendlich viele Klassen hat.

Aufgabe 14
Sei $\Sigma = \{a,b,c\}$, A und B vollständige deterministische finite Automaten, $\sim_A$ und $\sim_B$ die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\approx_{L(A)}$ und $\approx_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $L(A) = L(B) \implies \sim_A = \sim_B$.
2. $L(A) = L(B) \implies \approx_{L(A)} = \approx_{L(B)}$.
3. $\approx_{L(A)} \supseteq \sim_A$.

Aufgabe 15
Sei $\Sigma = \{a,b,c\}$, A und B vollständige deterministische finite Automaten, $\sim_A$ und $\sim_B$ die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\approx_{L(A)}$ und $\approx_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $L(A) \subseteq L(B) \implies \sim_A \subseteq \sim_B$
2. $\approx_{L(A)} \subseteq \approx_{L(B)} \implies \sim_A \subseteq \sim_B$

Aufgabe 16
Sei $\Sigma = \{a,b\}$ ein Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat
2. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine Sprache $L_n \subseteq \Sigma^*$ so dass der Index (d.h. die Anzahl der Äquivalenzklassen) der zu L_n gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L_n}$ genau n ist.
3. Zu jeder Sprache L die von einem DFA A erkannt wird, gibt es unendlich viele weitere DFA, die die gleiche Sprache erkennen und deren Zustandsanzahlen alle verschieden sind.
4. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilsprache L' mit $L' \subseteq L \subseteq \Sigma^*$.
5. Ist $L \cap L'$ nicht-regulär, so sind weder L noch L' regulär.
6. Wird L von einem vollständigen DFA mit p Zuständen erkannt und L' von einem vollständigen DFA mit q Zuständen erkannt, so gibt es vollständige DFAs mit pq Zuständen die $L \cup L'$ bzw. $L \cap L'$ erkennen,.
7. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.

Aufgabe 17
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &:= \{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\} \end{aligned}$$
