Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 4

Besprechung in KW 45 / Abgabe in KW 46

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 8 und 9

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

Aufgabe 4

Kann man die reguläre Pumping-Eigenschaft wie folgt abändern?

1. "$(\forall w \in L$ mit $|w| \geq k)$" durch "$(\forall w \in L)$" ersetzen.
2. "$(\forall i \in \mathbb{N})$" durch "$(\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$" ersetzen.
3. "$(\forall w \in L$ mit $|w| \geq k)$" durch "$(\forall w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq k)$" ersetzen.
4. Die Bedingung "$v \neq \lambda$" weglassen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 5

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen L_i über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{w \in \{a,b\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^5\} \\ L_2 &:= \{wcw \mid w \in \{a,b\}^+\} \\ L_3 &:= \{a^{4n}b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_3 &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ ist Primzahl}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa$ ist Teilwort von w oder bb ist Teilwort von w oder $|w|$ ist eine Kubikzahl$\}$ die reguläre Pumpingeigenschaft hat, aber nicht regulär ist.
Hinweis: Betrachten Sie $L \cap L((ab)^*)$.

Aufgabe 7
Wir betrachten die Trägermenge A und binäre Relationen R und S auf A (also $R, S \subseteq A \times A$). Wir definieren die Verknüpfung $\circ$ auf Menge der binären Relationen auf A vermöge $R \circ S := \{(x, y) \mid \exists z \in A : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$. Weiterhin definieren wir $R^0 := \mathrm{id}_A$ sowie $R^{i+1} := R^i \circ R$ für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Schließlich $R^* := \cup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} R^i$. Zeigen Sie:

1. Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ auf der Menge der binären Relationen über A.
   [Zusatzfrage: Ist dies von Bedeutung im Hinblick auf die Definition von R^i?]
2. R^* ist reflexiv und transitiv.
3. R^* ist die kleinste reflexiv-transitive Relation, die R umfasst.
4. Ist $\mathcal{R}$ die Menge aller reflexiv-transitive Relationen, die R umfassen, so gilt: $R^* = \cap_{S \in \mathcal{R}} S$.

Aufgabe 8
Sei $\Sigma = \{a, b, d\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen L_i über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{array}{lll} L_4 & := & \{w \cdot d \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^+\} \\ L_5 & := & \{w \in \{a, b, d\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^4\} \\ L_6 & := & \{a^n d^m b^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \ \wedge \ m \text{ ist Primzahl}\} \end{array}$$

Definition: $\overleftarrow{w}$ ist induktiv definiert vermöge $\overleftarrow{\lambda} := \lambda$ sowie $\overleftarrow{v \cdot x} := x \cdot \overleftarrow{v}$ für $x \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$.

Aufgabe 9
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0, 1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

1. Ist A regulär pumpbar und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär pumpbar.
2. Ist A nicht regulär pumpbar und $A \subseteq B$, so ist auch B nicht regulär pumpbar.
3. Ist A regulär und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär.
4. Ist $A \cap B$ regulär, so sind auch A und B regulär.
5. Es gibt eine endliche Sprache über dem Alphabet $\{0, 1\}$, welche die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht besitzt.
