

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 12

Besprechung in KW 3 / Abgabe in KW 4

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:

- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 16, 17 und 18

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: L entscheidbar $\Rightarrow \bar{L}$ entscheidbar

Aufgabe 5

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist rekursiv aufzählbar.
2. L ist semi-entscheidbar.
3. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale injektive berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder L ist endlich.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder $L = \emptyset$.
5. $L = \text{Bild}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.
6. $L = \text{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.
7. Die semi-charakteristische φ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 6

Seien A_1, \dots, A_n paarweise disjunkte, aufzählbare Teilmengen von $\{0, 1\}^*$ und sei A die Vereinigung der Mengen A_1, \dots, A_n . Zeigen Sie: Falls A entscheidbar ist, dann sind auch alle Mengen A_i entscheidbar ($i = 1, \dots, n$).

Aufgabe 7

Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für $\{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ an.

Aufgabe 8

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren $L := \{wc^i \mid w \in \Sigma^* \wedge i \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq i \leq |w|\}$. Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für L an.

Aufgabe 9

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist abzählbar.
2. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist abzählbar.
4. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist abzählbar.
5. Jede Obermenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.
6. Jede Obermenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.
7. Jede Teilmenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.

Aufgabe 10

Welche der Eigenschaften "reflexiv", "symmetrisch", "antisymmetrisch", "transitiv" haben die Relationen " \leq_{mo} " bzw. " \equiv_{mo} " auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 11

Sind folgende Funktionen $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ Reduktionen von L_1 auf L_2 ($L_1, L_2 \subseteq \{a, b\}^*$)?

1. $f(w) := (w\overline{w})^2$,
 $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$,
2. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$,
 $L_1 := \{(aba)^{3n} \in \{a, b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid 6 \text{ teilt } \#_b(w)\}$

Aufgabe 12

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $\neg(\overline{H_1} \leq_{\text{mo}} H_1)$
2. Es gibt eine Sprache L , so daß weder die Sprache L noch ihr Komplement \overline{L} aufzählbar sind.
3. Sind A und B RE-vollständig, so gilt $A \equiv_{\text{mo}} B$.

Aufgabe 13

Zeigen sie, dass die folgenden Sprachen nicht entscheidbar sind, indem Sie $H_1 = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \downarrow\}$ auf diese Sprachen reduzieren:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v(010) \downarrow\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } |L(M_v)| = \infty\} \\ L_3 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ stoppt immer}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 14

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

- $$\begin{aligned} L_1 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine gerade Anzahl von Zuständen}\} \\ L_2 &:= \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von } \lambda \text{ wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 15

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $\neg(\overline{H_1} \leq_{\text{mo}} H_1)$
2. Es gibt eine Sprache L , so daß weder die Sprache L noch ihr Komplement \overline{L} aufzählbar sind.
3. Sind A und B RE-vollständig, so gilt $A \equiv_{\text{mo}} B$.

Aufgabe 16

Geben Sie berechenbare Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 aus Σ^* nach Σ^* an, die folgende Eigenschaften haben:

1. $\text{Def}(f_1)$ nicht-entscheidbar und $\text{Bild}(f_1)$ entscheidbar.
2. $\text{Def}(f_2)$ nicht-entscheidbar und $\text{Bild}(f_2)$ nicht-entscheidbar.
3. $\text{Def}(f_3)$ entscheidbar und $\text{Bild}(f_3)$ nicht-entscheidbar.
4. $\text{Def}(f_4)$ entscheidbar und $\text{Bild}(f_4)$ entscheidbar.

Begründen Sie jeweils, weshalb die geforderten Eigenschaften erfüllt werden.

Aufgabe 17

Sind folgende Funktionen $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ Reduktionen von L_1 auf L_2 ($L_1, L_2 \subseteq \{a, b\}^*$)?

1. $f(w) := (w\overleftarrow{w})^2$,
 $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist Quadratzahl}\}$,
2. $f(w) := (bb)^{\#_a(w)}$,
 $L_1 := \{(aba)^{3n} \in \{a, b\}^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid 6 \text{ teilt } \#_b(w)\}$

Aufgabe 18

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Bei welchen Sprachen kann der Satz von Rice angewendet werden? Begründen Sie ihre Angaben.

- $L_1 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } M_v \text{ hat eine gerade Anzahl von Zuständen}\}$
 $L_2 := \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und bei Eingabe von } \lambda \text{ wird im Laufe der Berechnung ein } a \text{ gedruckt}\}$

Definition [(semi-)charakteristische Funktion]:

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sind die *semi-charakteristische Funktion* φ_L und die *charakteristische Funktion* χ_L definiert durch:

- $\varphi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ mit $\varphi_L(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L, \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst.} \end{cases}$
- $\chi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ mit $\chi_L(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Definition: [reduzierbar]:

- $LL' \iff L \text{ (many-one) reduzierbar auf } L'$
 $:\iff \exists f : \Sigma_L^* \rightarrow \Sigma_{L'}^* \text{ total und berechenbar mit}$
 $\forall w \in \Sigma_L^* : w \in L \iff f(w) \in L'$
 $L \equiv_{\text{mo}} L' :\iff (L \leq_{\text{mo}} L' \wedge L' \leq_{\text{mo}} L)$

Definition: [vollständig]:

Für eine Sprachklasse \mathcal{L} heisst eine Sprache A \mathcal{L} -vollständig bzgl. der Reduktion \leq_m genau dann, wenn $A \in \mathcal{L}$ und $\forall L \in \mathcal{L} : L \leq_{\text{mo}} A$.

Notation: Für eine Turing-Maschine M und ein Inputwort w bedeutet:

- $M(w) \uparrow$: M angesetzt auf w stoppt nicht,
 $M(w) \downarrow$: M angesetzt auf w stoppt,
 $M(w) \downarrow v$: M angesetzt auf w stoppt mit Ausgabe v .
 H := $\{\langle u, v \rangle \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(v) \downarrow\}$
 H_1 := $\{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \downarrow\}$