

# Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

## Aufgabenblatt 11

Besprechung in KW 2 / Abgabe in KW 3

### Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:

- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 13, 14 und 15

#### Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

#### Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

#### Aufgabe 3

Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

#### Aufgabe 4

Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist  $\{0, 1, a\}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ).

1.  $a^n 1 a^m$  nach  $a^{n-m}$ , wobei  $n-m := \begin{cases} n-m & \text{falls } n \geq m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
2.  $a^n 1 a^m$  nach  $a^{n \cdot m}$ .
3.  $a^n 1 a^m$  nach  $a^{n//m}$ , wobei  $n//m$  die ganzzahlige Division von  $n$  durch  $m$  bezeichnet.
4.  $a^n 1 a^m$  nach  $a^{n \bmod m}$ .
5.  $a^n$  nach  $\text{bin}(n)$ , wobei  $\text{bin}(n)$  die Binärdarstellung von  $n$  ist (niederwertige Bits hinten).
6.  $\text{bin}(n)$  nach  $a^n$ .
7.  $\text{bin}(n) \square \text{bin}(m)$  nach  $\text{bin}(n+m)$ .
8.  $\text{bin}(n) \square \text{bin}(m)$  nach  $\text{bin}(n \cdot m)$ .
9.  $\text{bin}(n)$  nach  $\text{bin}(n^2)$  überführt.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

#### Aufgabe 5

Geben Sie für folgende Sprachen jeweils entscheidende Turing-Maschinen an:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \\
 L_2 &= \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{abbb ist nicht Teilwort von } w\} \\
 L_3 &= \{w c w \mid w \in \{a, b\}^*\} \\
 L_4 &= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}
 \end{aligned}$$

Kommentieren Sie Ihre Programme!

**Aufgabe 6**

Geben Sie Turing-Maschinen an, die aus einem Bandinhalt der Form  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k$  (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ( $\square$ ) getrennt) die folgenden Bandinhalte erzeugen ( $w_1, w_2, \dots, w_k \in \{0, 1\}^+$ ):

1.  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k \square w_1$ .
2.  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k \square w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k$ .
3.  $w_1 \square w_3 \square w_5 \square \dots \square w_n$  mit  $n = \begin{cases} k-1 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$
4.  $w_1 \square w_2 \square w_1 \square w_3 \square w_1 \square w_4 \square \dots \square w_{k-1} \square w_1 \square w_k$ .

Kommentieren Sie Ihre Programme!

**Aufgabe 7**

Geben Sie eine Turing-Maschinen (mit Kommentierung) an, die folgende Funktion  $f$  berechnet:

$$f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^* \text{ mit } f(w) = \begin{cases} w & , \text{ falls } \#_a(w) \text{ nicht durch 4 teilbar,} \\ \text{undefiniert} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 8**

Geben Sie eine Turing-Maschine  $M$  an, die  $\text{bin}(n)$  nach  $\text{hex}(n)$  überführt, wobei  $\text{hex}(n)$  die Hexadezimaldarstellung von  $n$  ist (niederwertige Stellen hinten). Geben Sie einen Lauf von  $M$  auf dem Wort 11110100101 an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise und Ihr Programm!

**Aufgabe 9**

Geben Sie Turing-Maschinen an, die aus einem Bandinhalt der Form  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k$  (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ( $\square$ ) getrennt) die folgenden Bandinhalte erzeugen ( $w_1, w_2, \dots, w_k \in \{0, 1\}^+$ ):

1.  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k \square w_1$ .
2.  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k \square w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k$ .
3.  $w_1 \square w_3 \square w_5 \square \dots \square w_n$  mit  $n = \begin{cases} k-1 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$
4.  $w_1 \square w_2 \square w_1 \square w_3 \square w_1 \square w_4 \square \dots \square w_{k-1} \square w_1 \square w_k$ .

Kommentieren Sie Ihre Programme!

**Aufgabe 10**

Geben Sie eine Turing-Maschine an, die aus einem Bandinhalt der Form  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k$  (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ( $\square$ ) getrennt.  $w_1, w_2, \dots, w_k \in \{0, 1\}^+$ ) den Bandinhalt  $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k \square w_k \square w_{k-1} \square \dots \square w_2 \square w_1$  erzeugt.

**Aufgabe 11**

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet und  $L \subseteq \Sigma^*$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1.  $L$  ist entscheidbar.
2.  $L$  und  $\bar{L}$  sind semi-entscheidbar.
3. Es gibt eine Turingmaschine, die akzeptierend stoppt falls  $x \in L$ , und verwerfend stoppt, falls  $x \notin L$ .
4.  $L = \text{Bild}(f)$  für eine totale berechenbare streng-monoton steigende Funktion  $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$  oder  $L$  ist endlich.
5. Die charakteristische  $\chi_L$  Funktion von  $L$  ist berechenbar.

**Aufgabe 12**

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Menge der abzählbaren Sprachen über  $\Sigma$  ist überabzählbar.
  2. Die Menge der aufzählbaren Sprachen über  $\Sigma$  ist abzählbar.
  3. Es gibt nicht-aufzählbare Sprachen über  $\Sigma$ .
- 

**Aufgabe 13**

Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist  $\{0, 1, a\}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ). Kommentieren Sie Ihre Programme!

1.  $a^n 1 a^m$  nach  $a^{n \cdot m}$ .
2.  $\text{bin}(n) \square \text{bin}(m)$  nach  $\text{bin}(n + m)$ .

**Aufgabe 14**

Geben Sie eine entscheidende Turing-Maschine (mit Kommentierung) für die folgende Sprache an:

$$L := \{wcwca^n \mid w \in \{a, b\}^* \wedge n \in \mathbb{N} \wedge 3 \cdot |w| = n\}$$

**Aufgabe 15**

Geben Sie eine Turing-Maschinen (mit Kommentierung) an, die folgende Funktion  $f$  berechnet:

$$f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^* \text{ mit } f(w) = \begin{cases} (bba)^{3 \cdot \#_b(w)} & , \text{ falls } \#_a(w) \text{ nicht durch 4 teilbar,} \\ \text{undefiniert} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$


---

E schéine Kréschtdag an e glécklecht neit Joer!

Vrolijk Kerstmis en een een Gelukkig Nieuwjaar!

God Jul och Gott Nytt År!

Joyeux Noël et une Bonne Nouvelle Année!

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!

---