Effiziente Algorithmen SS 19

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

(Besprechung am 12.06.2019)

Aufgabe 1
Recherchieren Sie die Aussagen des Laplace'schen Entwicklungssatzes sowie der Cramerschen Regel. Bestimmen Sie die Laufzeit eines Algorithmusses zum Lösen eines linearen $(n\times n)$-Gleichungssystems, der beide Konzepte umsetzt.

Aufgabe 2
Rechnen Sie nach, dass die in der Vorlesung beim Strassen-Algorithmus angegebenne Zwischenergebnisse auch zum korrekten ERgebnis der Matrixmultiplikation führen.

Aufgabe 3
Recherchieren Sie die Aussagen des Laplace'schen Entwicklungssatzes sowie der Cramersche Regel. Bestimmen Sie die Laufzeit eines Algorithmusses zum Lösen eines linearen $(n\times n)$-Gleichungssystems, der beide Konzepte umsetzt.

Aufgabe 4
Recherchieren Sie den Begriff *positiv definit.*

Aufgabe 5
Schlagen Sie die hinreichenden und notwendigen Bedingungen nach, dass eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{R}$ invertierbar ist.

Aufgabe 6
Sei A eine positiv definite, symmetrische $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{R}$ mit $A = \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix}$, wobei B, C und D dabei $\left(\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}\right)$-Teilmatrizen sind.

1. Zeigen Sie, dass dann auch B und D symmetrisch und invertierbar sind..
2. Wir definieren $S := D - C \cdot B^{-1} \cdot C^T$. Zeigen Sie, dass auch S symmetrisch und positiv definit ist.

Aufgabe 7
Seien A, B, C, D und S wie in der vorhergehenden Aufgabe. Wir definieren

$$A' = \begin{pmatrix} B^{-1} + B^{-1} \cdot C^T \cdot S^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} & B^{-1} \cdot C^T \cdot S^{-1} \\ S^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie $A' \cdot A$ und $A \cdot A'$.
2. Zeigen Sie, dass $A' = A^{-1}$.

Aufgabe 8
Bei der Analyse im positiv definiten, symmetrischen Fall entstand die Rekurrenzgleichung:

$$I(n) \leq 2 \cdot I(\tfrac{n}{2}) + 5 \cdot M(\tfrac{n}{2}) + \boldsymbol{\mathcal{O}}^{(}n^2)$$

Welcher Fall des Master-Theorems ist anwendbar? Lösen Sie die Rekurrenzgleichung.

Aufgabe 9
Sei A eine reguläre $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{R}$. Wir definieren $\widetilde{A} := A^T \cdot A$.

1. Zeigen Sie, dass $\widetilde{A}$ symmetrisch und positiv definit ist.
2. Zeigen Sie, dass $A^{-1} = \widetilde{A} \cdot A^T$ ist.

Aufgabe 10
Recherchieren Sie *Pascalsches Dreieck*. Beweisen Sie die Gleichung $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}$ für $k, i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $1 < i \leq k$. Wie ist der Zusammenhang mit Aufgabe 2 von Übungsblatt 5.

Aufgabe 11
Sie haben in der Vorlesung die Matrix-Multiplikation nach Strassen gesehen, bei der die Zeilenanzahl jeweils halbiert wurde. Entwickeln Sie einen Algorithmus, bei dem die Zeilenanzahl gedrittelt wird. (Führen Sie die Matrix-Multiplikation auf die Multiplikation von (3×3)-Matrizen zurück.). Schätzen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus ab.