

Effiziente Algorithmen SS 19

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 5

(Besprechung am 29.05.2019)

Aufgabe 1 (AVL-Baum)

Wir betrachten AVL-Bäume:

1. Geben Sie zu jedem $h \in \mathbb{N}$ eine Folge von Insert- und Delete-Operationen an, die zu einem vollständigen binären Baum der Höhe h führt (d.h. bei dem alle Pfade von der Wurzel zu einem Blatt genau die Länge h haben).
2. Bestimmen Sie die kleinste Länge eines Pfades von der Wurzel zu einem Blatt in einem Fibonacci-Baum der Höhe h .
3. Wie lang muss der kürzeste Pfad von der Wurzel zu einem Blatt bei einem AVL-Baum der Höhe h mindestens sein. Beweisen Sie Ihre Aussage. Geben Sie eine Folge von Insert- und Delete-Operationen an, so dass ein solcher kurzer Pfad entsteht.

Aufgabe 2 (Binomialer Baum)

Ein *binomialer Baum* B_k ist ein rekursiv definierter geordneter Baum. Der binomiale Baum B_0 besteht nur aus einem einzigen Knoten. Der binomiale Baum B_k besteht aus zwei binomialen Bäumen B_{k-1} , die miteinander verkettet sind: Die Wurzel des einen ist das linkeste Kind des andern ($k > 0$). Beweisen Sie:

1. B_k hat 2^k Knoten.
2. Die Höhe des Baumes B_k ist k .
3. In der Tiefe i hat der Baum B_k genau $\binom{k}{i}$ Knoten ($i = 0, 1, \dots, k$). (namensgebende Eigenschaft)
4. Die Wurzel von B_k hat den Grad k , der größer ist als der Grad jedes anderen Knoten in B_k .

Aufgabe 3 (Rot-Schwarz-Baum)

Rot-Schwarz-Bäume sind eine Variante von balancierten binären Suchbäumen: Knoten sind schwarz oder rot gefärbt, Werte werden nur an den Nicht-Blatt-Knoten gespeichert, Wurzel wie auch Blätter sind schwarz gefärbt, Kinder von rot gefärbten Knoten sind schwarz gefärbt, und alle Pfaden von der Wurzel zu einem Blatt haben gleichviele schwarz gefärbte Knoten.

1. Zeigen Sie, dass in einem Rot-Schwarz-Baum alle Pfade, welche von der Wurzel zu einem Blatt führen, höchstens doppelt so lang sind wie die Länge eines kürzesten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt.
2. Zeigen Sie, dass die Höhe eines Rot-Schwarz-Baumes mit n Knoten in $\Theta(\log n)$ liegt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass man jeden Rot-Schwarz-Baum in einen (2-4)-Baum umwandeln kann.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass jeder AVL-Baum so eingefärbt werden kann, dass er ein Rot-Schwarz-Baum ist (AVL-Baum so aufgefasst, dass in den Blättern nichts gespeichert wird, also die Blätter die Zwischenräume repräsentieren).

Aufgabe 6 (Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus)

Wir betrachten den Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus. Führen Sie die Präfixanalyse (also das Erzeugen von π) für folgende Wörter durch

1. *aaaaaaaaabaaaaaaaaabba*
2. *abaabaaabaaabaaab*
3. *baaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa*

Aufgabe 7 (Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus)

Wir betrachten weiter den Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus.

1. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wort an, so dass in der Präfix-Analyse an einer Stelle mehr als n Rücksprünge hintereinander ausgeführt werden.
2. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wort an, so dass in der Präfix-Analyse an einer Stelle ein Rücksprung um mehr als n Zeichen ausgeführt wird.