Effiziente Algorithmen SS 19

Dr. Gengler

Aufgabenblatt 3

(Besprechung am 08.05.2019)

Aufgabe 1
Geben Sie einen Algorithmus an, der den Median von fünf Elementen mit höchstens sechs Vergleichen ermittelt.

Aufgabe 2
Ändern Sie den Selektions-Algorithmus wie im Folgenden beschrieben ab, und schätzen Sie die Laufzeit der Variante ab:

1. Statt Fünfergruppen werden Dreiergruppen gebildet, von denen dann die Mediane gebildet werden, usw.
2. Statt Fünfergruppen werden Siebenergruppen gebildet, von denen dann die Mediane gebildet werden, usw.
3. Statt Fünfergruppen werden Neunergruppen gebildet, von denen dann die Mediane gebildet werden, usw.

Aufgabe 3
Sei $B = (V, E)$ ein (gerichteter) binärer Baum mit Wurzel w. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Die Höhe des Baumes B beträgt mindestens $\log |V|$.
2. Die Höhe des Baumes B beträgt höchstens $\log |V|$.
3. Mindestens $\frac{|V|}{2}$ Knoten des Baumes B sind Blätter.
4. Höchstens $\frac{|V|}{2}+1$ Knoten des Baumes B sind Blätter.

Aufgabe 4
Wie verändern sich die Aussagen der vorherigen Aufgabe, wenn statt binären Bäumen solche betrachtet werden, wo für festes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ alle Knoten höchstens k Kinder haben.

Aufgabe 5
Geben Sie zu jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 10$ Listen an so dass der Insertion-Sort-Algorithmus genau $4n$ bzw. $n^{\frac{3}{2}}$ bzw $n \cdot \log n$ Vertauschungen ausführt.

Aufgabe 6
Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ Instanzen der Größe n an, so dass Heap-Sort "möglichst viele" Vergleiche macht.

Aufgabe 7
Lösen Sie die Rekurrenzgleichung $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ mit den Startwerten $x_0 = 2$ und $x_1 = 7$.

Aufgabe 8
Lösen Sie die Rekurrenzgleichung $y_n = 6y_{n-1} - 9y_{n-2}$ mit den Startwerten $y_0 = 1$ und $y_1 = 6$.

Aufgabe 9
Seien c_1 und c_2 zwei reelle Zahlen. Die quadratische Gleichung $r^2 - c_1 r - c_2$ habe die beiden verschieden reellen Nullstellen r_1 und r_2. Wie betrachten die Rekurenzgleichung $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit festen Startwerten a_0 und a_1 in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es Konstanten $\alpha_1$und α_2 in $\mathbb{R}$ gibt, so dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n$$

eine Lösung dieser Rekurrenzgleichung ist.

Hinweis: a_0 und a_1 legen ein (lösbares?) lineares Gleichungssystem fest, das die Bestimmung der Konstanten α_1 und α_2 ermöglicht. Dass die $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann die Rekurenzgleichung erfüllen, kann dann durch Induktion nachgewiesen werden, wobei im Induktionsschritt die obige quadratische Gleichung benutzt wird.

Aufgabe 10
Seien c_1 und c_2 zwei reelle Zahlen mit $c_2 \neq 0$. Die quadratische Gleichung $r^2 - c_1 r - c_2$ habe genau eine reelle Nullstelle r_0. Wir betrachten die Rekurrenzgleichung $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$ für $n \geq 2$ mit festen Startwerten a_0 und a_1 in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es Konstanten α_1 und α_2 in $\mathbb{R}$ gibt, so dass: die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \alpha_1 \cdot r_0^n + \alpha_2 \cdot n \cdot r_0^n$$

eine Lösung dieser Rekurrenzgleichung ist.