Approximationsalgorithmen

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 3
Version 27.11.2019

Aufgabe 1.
Reduzieren Sie Bin Packing mit Gewichten aus $\mathbb{Q}$ auf Bin Packing mit Gewichten aus $\mathbb{N}$. Warum bleibt hier die Approximationsgüte erhalten, wenn die Lösungen auf das ursprüngliche Problem zurück übertragen werden?

Aufgabe 2.
Zeigen sie, dass die folgenden Entscheidungsprobleme NP-vollständig sind:

(a) Eingabe: $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$. Frage: Gibt es $S \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $\Sigma_{i\in S} a_i = \Sigma_{i\in \overline{S}} a_i$? (Partitionsproblem)

(b) Eingabe: $B, k, a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$. Frage: Gibt es eine Partition $S_1, ..., S_k$ für $\{1, ..., n\}$ so, dass $\Sigma_{i\in S_j} a_i \leq B$ für jedes $j \in \{1, ..., k\}$ gilt? (Bin Packing Problem)

(c) Eingabe: $B, C, a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n \in \mathbb{N}$. Frage: Gibt es eine Teilmenge $S \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $\Sigma_{i\in S} a_i \leq B$ und $\Sigma_{i\in S} c_i \geq C$? (Rucksackproblem)

Hinweis: Das Entscheidungsproblem **Subset Sum** ist NP-vollständig.

Aufgabe 3.
Sei $0 < \gamma < 1$ eine feste Konstante und wir betrachten das Bin Packing Problem für Instanzen $I = \{S, c, B\}$ mit $c_s \leq \gamma B$ für alle $s \in S$. Zeigen Sie, dass der Next Fit Algorithmus auf solchen Instanzen ein Ergebnis k garantiert mit $k < (1-\gamma)^{-1}\,\mathrm{OPT}(I)+1$. Was folgt daraus?

Aufgabe 4.
(SetCover) Sei $H(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ die sog. n-te Harmonische Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass $H(n) \leq \ln n + 1$. Hinweis: $H(n)$ kann als Riemann-Obersumme bzw. Untersumme zum Integral $\int_1^n \frac{1}{x} dx$ gedeutet werden.

(b) Beweisen Sie $H(a) - H(b) \geq (b - a)/b$.

Aufgabe 5.
Recherchieren Sie Probleme, die unter der Voraussetzung $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ in PTAS $\setminus$ FPTAS und in FPTAS $\setminus$ PO liegen. Können Sie einen zugehörigen Beweis angeben?

Aufgabe 6.
(Bin Packing Variation) Sei $\frac{1}{3}$-BP die Teilklasse von Bin Packing, bei der alle Instanzen nur Gewichte mit $c_s > \frac{B}{3}$ haben. Als Maximum-Matchingproblem betrachten wir die Aufgabe, in einem Graphen ein maximales Matching mit größter Kardinalität zu berechnen.

(a) Können Sie das Matchingproblem benutzen, um eine Lösung für $\frac{1}{3}$-BP zu finden?

(b) Überprüfen Sie, ob das obige Matchingproblem in Polynomialzeit lösbar ist. Was folgt daraus für $\frac{1}{3}$-BP?

(c) Was passiert, wenn nur $c_s \geq \frac{B}{3}$ garantiert ist?

Aufgabe 7.

Lösen Sie das Minimum-Partition-Problem mit Hilfe eines Simple-Knapsack-Algorithmus. Formulieren Sie das Knapsack-Problem als ein ganzzahliges Lineares Programmierungsproblem.

Aufgabe 8.

(Simple-Knapsack) Betrachten Sie nochmals das Problem Simple-Knapsack wie in der Vorlesung und den Greedy-Algorithmus dafür. Beweisen Sie, dass 2 auch die untere Schranke für die Approximationsgüte des Greedy-Algorithmus ist. Tip: Die Schranke erreicht man als Grenzwert für
beliebig große Bingröße B.