Approximationsalgorithmen

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 1
Version 08.10.2019

Aufgabe 1.

(Landau-Symbole, Groß-O Notation) Zur Wiederholung etwas über die Landau-Symbole. Seien $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ zwei nicht negative, reelle Funktionen, dann gilt:

1. $f \in O(g) \Leftrightarrow \exists c, N \in \mathbb{R} : \forall n \geq N : f(n) \leq cg(n)$.
2. $f \in \Omega(g) \Leftrightarrow \exists c, N \in \mathbb{R} : \forall n \geq N : f(n) \geq cg(n)$.
3. $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)$.
4. $f \in o(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$.
5. $f \in \omega(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} g(n)/f(n) = 0$.
6. $f \sim g \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$.

In der Praxis wird häufig anstelle von $f \in O(g)$ einfach $f = O(g)$ und $f(n) = O(g(n))$ geschrieben. Allerdings ist das "=" in diesem Falle nicht symmetrisch!

(a) Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihren Wachstumseigenschaften bezüglich O- und o-Beziehungen:
$\log n$, $\sqrt{\log n}$, $\sqrt{n}$, $(\log \sqrt{n})^2$, $\frac{n}{\log n}$, n^k (für $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$), $n^{\log n}$, $n^{\log\log n}$, $\log(n^2)$, $(\log n)^2$, n^n, $\log\log\log n$, $\sum_{i=0}^{n} i$, $\sum_{i=0}^{n} i^2$, $2^{n \log n}$, $(\sqrt{\log n})^{\log\log n}$.

(b) Geben Sie Funktionen f und g (von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$) an, so dass weder $f \in O(g)$ noch $g \in O(f)$. Beweisen Sie diese Eigenschaften. Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$h(n) = \begin{cases} n^2 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & \text{, sonst} \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie $O(\log) = O(\log_{10}) = O(\ln) = O(\log(2n)) = O(\log(n + \log(n))) = O(\log(n^2))$.

Aufgabe 2.

Sei Σ eine endliches Alphabet, Σ^* die Menge der Wörter über Σ und seien $A, B \subseteq \Sigma^*$. Beweisen Sie: A ist reduzierbar auf B genau dann, wenn das Komplement $\bar{A} = \Sigma^* - A$ reduzierbar auf das Komplement $\bar{B}$ ist.

Aufgabe 3.

Überprüfen Sie, ob die Poly-Zeit-Reduktion symmetrisch, reflexiv, asymmetrisch, anti-symmetrisch und/oder transitiv ist.

Aufgabe 4.

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ Entscheidungsprobleme in NP. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $A \leq^{Poly} B$ und $B \in \mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{A} \in \mathrm{P}$.

(b) $A \leq^{Poly} B$ und A ist NP-vollständig $\Rightarrow B$ ist NP-vollständig .

(c) $\mathrm{P} = \mathrm{NP} \Leftrightarrow$ es existiert ein NP-vollständiges Problem, dass in P liegt.

Aufgabe 5.

(Die Klasse NP) Zeigen Sie, dass die folgende Definition der Klasse NP äquivalent zu der Definiton aus der Vorlesung ist:

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist in NP genau dann, wenn es eine nicht-deterministische polynomial-zeitbeschränkte Turing-Maschine M auf Σ^* gibt, so dass

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow \text{ es gibt eine Bereschnung von } M \text{ auf } x, \text{ die akzeptierend ist.}$$

Aufgabe 6.

Sei Φ eine boolesche Formel in Konjunktiver Normalform mit n Variablen und m Klauseln.

(a) Wie können solche Formeln als Bitfolge kodiert werden, wenn für Zahlen eine binäre Kodierung verwendet wird?

(b) Von welcher Größenordnung ist die maximal mögliche Kodierungslänge für gegebenes n und m?

(c) Von welcher Größenordnung ist die maximal mögliche Kodierungslänge, wenn nur die Anzahl der Variablen n gegeben ist? Wie verhält sich dies zur vorherigen Größe basierend auf n und m?

(d) Ändern sich die Größenordnungen, wenn eine unäre Kodierung für die auftretenden Zahlen verwendet wird?

Aufgabe 7.

Wir betrachten das Traveling-Salesman-Entscheidungsproblem:

Eingabe: Vollständiger Graph $G = (V, E)$, eine totale Funktion $f : E \to \mathbb{N}$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Hat G einen Hamilton-Kreis H mit Kosten $\sum_{e \in H} f(e) \leq k$?

Wie kann dieses Entscheidungsproblem kodiert werden? Was ist die Eingabegröße? Zeigen Sie, dass das Problem in NP liegt.