Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 9

Besprechung in KW 50 / Abgabe in KW 51

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 23, 24, 25, 26 und 27

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

Aufgabe 4
Konstruieren Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 äquivalente Grammatiken, welche keine λ-Regeln (also keine Regeln der Form $A \to \lambda$ mit A Nonterminal) besitzen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

1. $G_1 := (\{A, B, C, D\}\ ,\ \{a, b\}\ ,\ \{C \to \lambda, A \to aD, B \to bb, C \to bCb, D \to CB, D \to aa\}\ ,\ A\ )$,
2. $G_2 := (\{A, B, C, D\}\ ,\ \{a, b\}\ ,\ P\ ,\ A\ )$ mit
   $P = \{A \to aD, B \to C, B \to b, C \to bCb, C \to \lambda, D \to BCB, D \to aa\}$.

Aufgabe 5
Konstruieren Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 äquivalente Grammatiken, welche keine λ-Regeln (also keine Regeln der Form $A \to \lambda$ mit A Nonterminal) und keine längenerhaltenden Regeln (also keine Regeln der Form $A \to B$ mit A, B Nonterminals) besitzen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

1. $G_1 := (\{A, B, C, D\}\ ,\ \{a, b\}\ ,\ \{D \to \lambda, A \to aDD, B \to bb, C \to bCb, C \to a, D \to C, D \to B, D \to aa\}\ ,\ A)$
2. $G_2 := (\{A, B, C, D, E\}\ ,\ \{a, b\}\ ,\ \{A \to aD, B \to C, B \to b, C \to bCb, C \to B, C \to a, D \to BCB, D \to E, E \to A\}\ ,\ A)$

Aufgabe 6
Konstruieren Sie zur der Grammatik $G_1 = (\{S, A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, B_3, C, C_1, C_2, C_3\}, \{a, b, c\}, P, S)$ eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

$$\begin{aligned} P := \{S \to aA \mid bB \mid cC\ ,\quad & A \to A_1c \mid A_2A_1 \mid a\ ,\ A_1 \to A_2 \mid aa\ ,\ A_2 \to \lambda \mid bb\ ,\\ & B \to B_3\ ,\ B_1 \to B_2 \mid a\ ,\ B_2 \to B_3 \mid b\ ,\ B_3 \to B_1 \mid c\ ,\\ & C \to C_1C_2C_3\ ,\ C_1 \to C_1C_1C_1 \mid a\ ,\ C_2 \to cC_2cC_2 \mid b\ ,\ C_3 \to ccc\ \ \} \end{aligned}$$

Aufgabe 7
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne λ-Regeln. Wir betrachten die folgenden Verfahren:

(A) Solange es Regeln $A \to B$ und $B \to \alpha$ gibt mit $A, B \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^+ \setminus N$, so dass $A \to \alpha$ noch nicht in der Regelmenge ist, füge die Regel $A \to \alpha$ zur Regelmenge hinzu.

(B) Solange es Regeln $A \to \alpha B \beta$ und $B \to C$ gibt mit $A, B, C \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^*$, so dass $A \to \alpha C \beta$ noch nicht in der Regelmenge ist, füge die Regel $A \to \alpha C \beta$ zur Regelmenge hinzu.

(C) Streiche alle Regeln $A \to B$ mit $A, B \in N$.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Das Verfahren (A) terminiert.
2. Das Verfahren (B) terminiert.
3. Durch Anwenden von (A) und danach (C) auf die Grammatik G erhält man eine zu G äquivalente Grammatik ohne Regeln der Form $A \to B$ mit $A, B \in N$.
4. Durch Anwenden von (B) und danach (C) auf die Grammatik G erhält man eine zu G äquivalente Grammatik ohne Regeln der Form $A \to B$ mit $A, B \in N$.

Hinweis: Betrachten Sie unter anderem die Grammatik $G = (\{A, B, C, D, E, S\}\ ,\ \{a, b\}, \{S \to A, A \to B, B \to CD, C \to E, D \to F, E \to a, F \to b\}, S)$.

Aufgabe 8
Angenommen, wir nehmen folgende Änderungen in der Definition der kontextfreien Pumping-Eigenschaft vor:

1. "$(\forall z \in L$ mit $|z| \geq k)$" durch "$(\forall z \in L)$" ersetzen.
2. "$(\forall z \in L$ mit $|z| \geq k)$" durch "$(\forall z \in \Sigma^*$ mit $|z| \geq k)$" ersetzen.
3. Die Bedingung "$vx \neq \lambda$" weglassen.
4. "$(\forall i \in \mathbb{N}_0)$" durch "$(\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$" ersetzen.
5. "$vx \neq \lambda$" durch "$v \neq \lambda \wedge x \neq \lambda$" ersetzen
6. "$(\forall i \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^iy$" durch "$(\forall i, j \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^jy$" ersetzen.
7. "$(\exists u, v, w, x, y$ mit $\ldots)(\forall i \in \mathbb{N}_0)$" durch "$(\forall i \in \mathbb{N}_0)(\exists u, v, w, x, y$ mit $\ldots)$" ersetzen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Hinweis: Denken Sie bei 5. an $L = \{a^nb^nc^nd^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a, b, c\}^*$, und bei 7. an $L = \{b^ja^pb^pc^p \mid j \in \mathbb{N}_0, j \neq 0, p \in \mathbb{N}_0, p \neq 0\}$.

Aufgabe 9
Wir definieren die Wortfolge $(w_i \mid i \in \mathbb{N})$ induktiv vermöge $w_0 := \lambda$ und $w_{i+1} := w_i \cdot b \cdot a^i$ für $i \in \mathbb{N}$. Weiter sei $L := \{w_i \mid i \in N_0\}$. Beweisen Sie:

1. $\{|w| \mid w \in L\} = \{\frac{n(n+1)}{2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
2. $\forall w \in L \quad \forall p \in \mathbb{N}_o \quad \exists n \in \mathbb{N}_0 \ : \ (\ n > |w| \ \wedge \ L \cap \{v \in \{a, b\}^* \mid n \leq |v| \leq n + p\} = \emptyset\ )$.
3. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht.

Aufgabe 10
Beweisen Sie, dass die folgenden Sprachen L_i die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht haben:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{a^nb^{2n}c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\
L_2 &= \{a^nb^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\
L_3 &= \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\} \\
L_4 &= \{a^m \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : n = m^2\} \\
L_5 &= \{a^p \mid p \text{ Primzahl}\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11
Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei? Beweisen sie Ihre Aussagen!

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{wv \mid w, v \in \{a,b\}^*, w = v\}\\
L_2 &= \{wv \mid w, v \in \{a,b\}^*, |w| = |v|\}\\
L_3 &= \{wv \mid w, v \in \{a,b\}^*\ ,\ w \neq v\}\\
L_4 &= \{wv \mid w, v \in \{a,b\}^*\ ,\ w \neq v\ ,\ |w| = |v|\}\\
L_5 &= \{a,b\}^* \setminus \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}\\
L_6 &= \{wv \mid w, v \in \{a,b\}^*, w = \overleftarrow{v}\}\\
L_7 &= \{wv \mid w, v \in \{a,b\}^*, |w| = |\overleftarrow{v}|\}\\
L_8 &= \{wv \mid w, v \in \{a,b\}^*, w \neq \overleftarrow{v}\}\\
L_9 &= \{wvu \mid w, v, u \in \{a,b\}^*, w = v = u\}\\
L_{10} &= \{wcvcu \mid w, v, u \in \{a,b\}^*, w = v = u\}\\
L_{11} &= \{wvu \mid w, v, u \in \{a,b\}^*, w = \overleftarrow{v} = u\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 12
Sei Σ ein Alphabet, L eine kontextfreie Sprache über Σ, R eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus von Σ^* nach Σ^*. Zeigen Sie:

1. $L \cap R$ ist kontextfrei,
2. $h(L)$ ist kontextfrei,
3. $h^{-1}(L)$ ist kontextfrei

Aufgabe 13
Sei:
$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a,d\}^* \cdot \{b,d\}^* \cdot \{c,d\}^*\\
L_2 &:= \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}\\
L_3 &:= \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a,b,c,d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\}\\
L_4 &:= L_2 \cup L_3
\end{aligned}$$
Welche der Sprachen $L_1, \dots, L_4$ besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen $L_1, \dots, L_4$ sind kontextfrei?
Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen $L_1, \dots, L_4$?

Aufgabe 14
$$\begin{aligned}
\text{Sei } L &:= \{w_1\#w_2\#w_3 \cdots \#w_k\# \mid k \in \mathbb{N} \text{ gerade}, w_1 \in \{a,b\}^+, \forall i \in \{1, \dots, k-1\} : w_i = \overleftarrow{w_{i+1}}\}\\
&= \{(w\#\overleftarrow{w}\#)^n \mid n \in \mathbb{N}, w \in \{a,b\}^+\}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

1. L ist nicht kontextfrei,
2. L ist Schnitt zweier kontextfreier Sprachen L_1 und L_2,
3. Das Komplement von L ist eine kontextfreie Sprache.
   Hinweis: Geben Sie einen erkennenden NPDA an

Aufgabe 15
Wir betrachten die *Dyck-Sprachen* $D_1 := L(G_1)$ und $D_2 := L(G_2)$, wo

$$\begin{aligned}
G_1 &= (\{S\}\,,\,\{(,)\}\,,\,\{S \to SS, S \to \lambda, S \to (S)\}\,,\,S)\\
G_2 &= (\{S\}\,,\,\{(,),[,]\}\,,\,\{S \to SS, S \to \lambda, S \to (S), S \to [S]\}\,,\,S)
\end{aligned}$$

1. Beschreiben Sie D_1 und D_2 umgangssprachlich.
   Siehe auch: `http://en.wikipedia.org/wiki/Dyck_language` (englische Version!).
2. Geben Sie erkennende Kellerautomaten für D_1 und D_2 an.
3. Geben Sie Homomorphismen g, h und eine reguläre Sprache R an, so dass $D_1 = h^{-1}(D_2 \cap R)$.
4. Geben Sie Homomorphismen g und h sowie eine reguläre Sprache R an, so dass $\{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\} = h^{-1}(D_2 \cap R)$ ist.

Aufgabe 16
L werde erzeugt von der Grammatik $G = (\{S, X, Y, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P die folgenden Regeln hat:

$$S \to XY\ ,\ Y \to CX\ ,\ X \to XA \mid XB \mid AX \mid BX\ ,\ A \to a\ ,\ B \to b\ ,\ C \to c$$

Prüfen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmusses, ob die folgenden Wörter in L liegen.

$$abcabcabc\ ,\ abbabaa\ ,\ acacacacac\ ,\ cccccccccc\ ,\ bbbbcbbbb$$

Aufgabe 17
Zu $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{ANF}(L) &:= \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } wv \in L\}, \\ \mathrm{END}(L) &:= \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } vw \in L\}, \\ \mathrm{SUB}(L) &:= \{w \mid \exists v, u \in \Sigma^* \text{ mit } vwu \in L\}. \end{aligned}$$

1. Geben Sie ANF(L), END(L) und SUB(L) für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):

$$L_1 := \{ab, aababb, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in N\}, \quad L_3 := \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer finiter Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	3	4	5	6	7	8
a	$\{2\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
b	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
c	$\emptyset$	$\{6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{7\}$	$\{7, 8\}$	$\{8\}$

Geben Sie nichtdeterministische Automaten an, die ANF($L(M)$), END($L(M)$) und SUB($L(M)$) erkennen.
3. Zeigen Sie: Wird L von einem finiten Automat erkannt, so auch ANF(L), END(L) und SUB(L).
4. Zeigen Sie: Wird L von einer kontextfreien Grammatik erzeugt, so auch ANF(L), END(L) und SUB(L).

Aufgabe 18
Sei L eine Sprache über Σ und L habe die Pumpingeigenschaft mit der Pumpingkonstanten k. Zeigen Sie:

1. $L \neq \emptyset \iff L \cap \Sigma^{\leq k} \neq \emptyset$
2. $|L| = \infty \iff L \cap (\Sigma^{\leq 2k} \setminus \Sigma^{\leq k}) \neq \emptyset$

Aufgabe 19
Geben Sie Verfahren an, die bei Eingabe eines endlichen Automaten M entscheiden, ob $L(M) = \emptyset$, $|L(M)| < \infty$, $|L(M)| = \infty$, $\overline{L(M)} = \emptyset$.

Aufgabe 20
Geben Sie Verfahren an, die bei Eingabe eines Kellerautomaten P entscheiden, ob $L(P) = \emptyset$, $|L(P)| < \infty$, $|L(P)| = \infty$.

Aufgabe 21
Geben Sie ein Verfahren an, das bei Eingabe von zwei endlichen Automaten M und M' entscheidet, ob $L(M) = L(M')$.

Aufgabe 22 (für gute Studierende)
Sei $L := \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0 \wedge n \neq m\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. L hat nicht die reguläre Pumping-Eigenschaft.
2. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.

Hinweis: L ist nicht kontextfrei. Dies kann mit Hilfe von Ogdens Lemma nachgewiesen werden, gute Studierende können den Beweis versuchen. Die Anwendung von Ogdens Lemma ist nicht wesentlich schwieriger als die Anwendung des Pumping Lemmas. (Zu Ogdens Lemma siehe `http://en.wikipedia.org/wiki/Ogden%27s_lemma`, bzw. William Ogden: A Helpful Result for Proving Inherent Ambiguity, Mathematical Systems Theory, 2(3), pp. 191-194, 1968.

Aufgabe 23
Sei:
$$\begin{array}{lcl} L_1 & := & \{a,d\}^* \cdot \{b,d\}^* \cdot \{c,d\}^* \\ L_2 & := & \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \\ L_3 & := & \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a,b,c,d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\} \\ L_4 & := & L_2 \cup L_3 \end{array}$$
Welche der Sprachen $L_1, \ldots, L_4$ besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen $L_1, \ldots, L_4$ sind kontextfrei?
Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen $L_1, \ldots, L_4$?

Aufgabe 24
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Jede reguläre Sprache hat die kontexfreie Pumping-Eigenschaft.
3. Es gibt eine Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat, aber nicht die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat.
4. Jede Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat, hat auch die kontexfreie Pumping-Eigenschaft.
5. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat, hat auch die reguläre Pumping-Eigenschaft.
6. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat ist regulär.

Aufgabe 25
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und seien $L, R \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen über Σ. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Sie dürfen die in der Vorlesung bewiesenen Sätze verwenden, müssen diese aber zitieren.

1. Keine Teilmenge einer kontextfreien Sprache ist regulär.
2. $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \wedge R \in \text{CFL} \implies L \cap R \in \text{CFL}$ (wobei $L, R \subseteq \Sigma^*$).
3. $L \in \text{CFL} \wedge R \in \text{CFL} \implies L \cap R \in \text{REG}$.
4. $L \in \text{CFL} \implies \Sigma^* \setminus L \notin \text{CFL}$.
5. Jede unendliche reguläre Sprache ist disjunkte Vereinigung zweier unendlicher regulärer Sprachen.
6. Es gibt kontextfreie nichtreguläre Sprachen, die disjunkte Vereinigung von zwei unendlichen kontextfreien Sprachen sind.
7. Die Vereinigung einer nicht–regulären Sprache mit einer kontextfreien Sprache ist nicht–regulär.
8. Zu jeder kontextfreien Sprache gibt es unendlich viele kontextfreie Grammatiken, die diese Sprache erzeugen.
9. Es gibt nur abzählbar unendlich viele kontextfreie Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$.

Aufgabe 26
Sei $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid bb$ ist Teilwort von w, oder $\#_a(w)$ ist Primzahl, oder $\#_b(w) = 0\}$. Zeigen Sie, dass L die kontextfreie Pumping-eigenschaft hat, aber nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 27

Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm mit folgenden Sprachmengen:

$P(\Sigma^*)$	alle Sprachen über Σ
REG	reguläre Sprachen über Σ
CFL	kontextfreie Sprachen über Σ
$\mathcal{A}_3$	Sprachen über Σ mit regulärer Pumping Eigenschaft
$\mathcal{A}_2$	Sprachen über Σ mit kontextfreier Pumping Eigenschaft

Tragen Sie überall eine Sprache ein, die im jeweiligen Bereich liegt, begründen Sie Ihre Eintragungen.
Bemerkung: Sie dürfen alle Sprachen aus den Übungsbl¨ättern verwenden.