Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 8

Besprechung in KW 49 / Abgabe in KW 50

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 15, 16, 17, 18 und 19

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

Aufgabe 4
Geben Sie jeweils allgemeine Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_2 &:= \{a^{n^2} b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_3 &:= \{\mathrm{bin}(n) \cdot a^n \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_4 &:= \{\mathrm{bin}(n)\$\,\mathrm{bin}(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_5 &:= \{\mathrm{bin}(n)\$\,\mathrm{bin}(m)\$\{\mathrm{bin}(n+m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

Notation: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\mathrm{bin}(n)$ die Binärdarstellung von n, ohne führende Nullen, mit der niederwertigsten Ziffer hinten.

Aufgabe 5
Angenommen, wir nehmen folgende Änderungen in der Definition der kontextfreien Pumping-Eigenschaft vor:

1. "$(\forall z \in L$ mit $|z| \geq k)$" durch "$(\forall z \in L)$" ersetzen.
2. "$(\forall z \in L$ mit $|z| \geq k)$" durch "$(\forall z \in \Sigma^*$ mit $|z| \geq k)$" ersetzen.
3. Die Bedingung "$vx \neq \lambda$" weglassen.
4. "$(\forall i \in \mathbb{N}_0)$" durch "$(\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$" ersetzen.
5. "$vx \neq \lambda$" durch "$v \neq \lambda \wedge x \neq \lambda$" ersetzen
6. "$(\forall i \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^iy$" durch "$(\forall i, j \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^jy$" ersetzen.
7. "$(\exists u, v, w, x, y$ mit $\dots)(\forall i \in \mathbb{N}_0)$" durch "$(\forall i \in \mathbb{N}_0)(\exists u, v, w, x, y$ mit $\dots)$" ersetzen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Hinweis: Denken Sie bei 5. an $L = \{a^nb^nc^nd^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a, b, c\}^*$, und bei 7. an $L = \{b^ja^pb^pc^p \mid j \in \mathbb{N}_0, j \neq 0, p \in \mathbb{N}_0, p \neq 0\}$.

Aufgabe 6
Wir definieren die Wortfolge $(w_i \mid i \in \mathbb{N})$ induktiv vermöge $w_0 := \lambda$ und $w_{i+1} := w_i \cdot b \cdot a^i$ für $i \in \mathbb{N}$. Weiter sei $L := \{w_i \mid i \in N_0\}$. Beweisen Sie:

1. $\{|w| \mid w \in L\} = \{\frac{n(n+1)}{2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
2. $\forall w \in L \quad \forall p \in \mathbb{N}_o \quad \exists n \in \mathbb{N}_0 \;\; : \;\; (\; n > |w| \;\; \wedge \;\; L \cap \{v \in \{a,b\}^* \mid n \leq |v| \leq n+p\} = \emptyset \;)$.
3. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht.

Aufgabe 7
Beweisen Sie, dass die folgenden Sprachen L_i die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht haben:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\
L_2 &= \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\
L_3 &= \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\} \\
L_4 &= \{a^m \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : n = m^2\} \\
L_5 &= \{a^p \mid p \text{ Primzahl}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8
Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei? Beweisen sie Ihre Aussagen!

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{wv \mid w,v \in \{a,b\}^*, w = v\} \\
L_2 &= \{wv \mid w,v \in \{a,b\}^*, |w| = |v|\} \\
L_3 &= \{wv \mid w,v \in \{a,b\}^* \;,\; w \neq v\} \\
L_4 &= \{wv \mid w,v \in \{a,b\}^* \;,\; w \neq v \;,\; |w| = |v|\} \\
L_5 &= \{a,b\}^* \setminus \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\} \\
L_6 &= \{wv \mid w,v \in \{a,b\}^*, w = \overleftarrow{v}\} \\
L_7 &= \{wv \mid w,v \in \{a,b\}^*, |w| = |\overleftarrow{v}|\} \\
L_8 &= \{wv \mid w,v \in \{a,b\}^*, w \neq \overleftarrow{v}\} \\
L_9 &= \{wvu \mid w,v,u \in \{a,b\}^*, w = v = u\} \\
L_{10} &= \{wcvcu \mid w,v,u \in \{a,b\}^*, w = v = u\} \\
L_{11} &= \{wvu \mid w,v,u \in \{a,b\}^*, w = \overleftarrow{v} = u\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 9
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G := (\{X\}, \{a,b\}, P, X)$ Pushdown-Automaten nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren, mit $P: \;\; X \to XX \mid aXb \mid bXa \mid ab \mid ba$.
Sei $w := baabba$. Geben Sie alle Ableitungsbäume für w bezüglich der Grammatik G an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten jeweils Läufe auf dem Wort w an, die den verschiedenen Ableitungsbäumen entsprechenden. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 10
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N = \{S\}$, $T = \{(,), \Phi, a, b, c, \cdot, \cup, ^*\}$ und
$$P = \{S \to (\Phi), S \to (a), S \to (b), S \to (c), S \to (S \cdot S), S \to (S \cup S), S \to (S)^*\}.$$
Welche Sprache wird von der Grammatik G erzeugt?

Aufgabe 11
Sei $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \in \mathbb{N} \wedge (i = j \vee j = k)\}$.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für L an.
2. Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zu G einen Kellerautomaten P, der L erkennt.
3. Geben Sie für Ihre Grammatik G zum Wort $w = a^3 b^3 c^3$ alle Ableitungsbäume an.
4. Geben Sie zu jedem der Ableitungsbäume die entsprechenden Läufe auf w von P an.

Aufgabe 12
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation, Iteration, Homomorphismus, inversem Homomorphismus und Schnitt mit regulären Mengen.
   Hinweis: Benutzen Sie bei ,,Schnitt mit regulären Mengen" die Produktautomatenkonstruktion für einen erkennenden Keller-Automaten und einen endlichen Automaten, bei ,,Homomorphismus" erzeugende kontextfreie Grammatiken und bei ,,inversem Homomorphismus" erkennende Keller-Automaten.
2. Die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen unter Komplementbildung und Schnitt.

Aufgabe 13
Sei $P = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ ein nichtdeterministischer Kellerautomat (NPDA). Sei $\perp$ ein neues Zeichen, dass weder in Σ noch in Γ ist. Wir definieren:

$$\begin{array}{lcl} L(P) & := & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \ \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\} \\ L_\lambda(P) & := & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in K \ \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^+ (p, \lambda, \lambda)\} \\ L_f(P) & := & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \, \exists \alpha \in \Gamma^* \ \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \alpha)\} \\ L_\perp(P) & = & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \text{ mit } (q_0, w, \perp) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\} \end{array}$$

1. Gilt für jeden NPDA P, dass $L(P) = L_f(P)$ ist? (Begründung!)
2. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
   Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_f(P) = L$.
3. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
   Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_\perp(P) = L$.
4. Gilt für jeden NPDA P, dass $L(P) = L_\lambda(P)$ ist? (Begründung!)
5. Zeigen Sie: Für jeden NPDA P gilt: $\lambda \in L_\lambda(P)$
6. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Gilt die folgende Aussage: Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_\lambda(P) = L$.

Aufgabe 14
Zu einer kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ definieren wir:

$$\begin{array}{lcll} N_{\text{erz}} & := & \{X \in N \mid \exists w \in T^* \ (X \xrightarrow{*} w)\} & \text{erzeugende Nonterminals} \\ N_{\text{err}} & := & \{X \in N \mid \exists \alpha, \beta \in (T \cup N)^* \ (S \xrightarrow{*} \alpha X \beta)\} & \text{erreichbare Nonterminals} \\ N_{\text{ntz}} & := & \{X \in N \mid \exists \alpha, \beta \in (T \cup N)^* \ \exists w \in T^* \ (S \xrightarrow{*} \alpha X \beta \xrightarrow{*} w\} & \text{nützliche Nonterminals} \end{array}$$

Geben Sie ein Verfahren an, das zu einer Grammatik $G = (N, T, P, S)$ die Mengen N_{erz}, N_{err} und N_{ntz} bestimmt.

1. Gilt im Allgemeinen $N_{\text{ntz}} = N_{\text{erz}} \cap N_{\text{err}}$?
2. Geben Sie ein Verfahren an, das entscheidet, ob $L(G) = \emptyset$ ist.
3. Gibt es zu jeder kontextfreien Grammatik G eine äquivalente Grammatik G', die nur nützliche Nonterminals besitzt?
4. Geben Sie ein Verfahren an das zu einer Grammatik G mit $L(G) \neq \emptyset$ eine äquivalente Grammatik G' erzeugt, die nur nützliche Nonterminals besitzt.
5. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die Grammatik $G := (\{A, B, C, D, E\} \ , \ \{a, b\} \ , \ P \ , \ A)$ an, wo $P := \{A \to AC, A \to B, B \to bb, C \to CD, C \to a, C \to Ca, E \to aE, E \to aa\}$

Aufgabe 15
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Auf N ist die Relation $\backsim$ definiert vermöge

$$X \backsim Y \;:\Longleftrightarrow\; X \xrightarrow{*} Y \wedge Y \xrightarrow{*} X.$$

sowie auf $N/\backsim$ die Relation $\rightsquigarrow$ vermöge

$$A \rightsquigarrow B \;:\Longleftrightarrow\; \exists X \in A, \exists Y \in B \text{ mit } (X, Y) \in P.$$

Zeigen Sie, dass $\backsim$ eine Äquivalenzrelation und $\rightsquigarrow^*$ eine Ordnungsrelation ist. ($\rightsquigarrow^*$ ist die reflexiv transitive Hülle von $\rightsquigarrow$.)

Aufgabe 16
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie erkennende Kellerautomaten sowie erzeugende kontextfreie Grammaitiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
&L_1 := \{wv \mid v \in \{c\}^+,\, w \in \{a,b\}^*,\, |w| = |v|\}\\
&L_2 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\,,\; i < j\}\\
&L_3 := L_1 \cdot L_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 17
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G := (\{S, A, B, C\}\,, \{a, b, c, d\}\,, P\,, S)$ Pushdown-Automaten nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren, wobei
$P := \{S \to AbS, S \to CAB, A \to cA, A \to a, B \to CBb, B \to b, C \to dd\}$.
Sei $w := ccabddcaddddbbb$. Geben Sie einen Ableitungsbaum B für w an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten jeweils einen dem Ableitungsbaum B entsprechenden Lauf auf dem Wort w an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 18
Sei $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \wedge (i = j \vee j = k)\}$.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für L an.
2. Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zu G einen Kellerautomaten P, der L erkennt.
3. Geben Sie für Ihre Grammatik G zum Wort $w = a^3b^3c^3$ alle Ableitungsbäume an.
4. Geben Sie zu jedem der Ableitungsbäume die entsprechenden Läufe auf w von P an.Sei:
   $$\begin{aligned}
   L_1 &:= \{a,d\}^* \cdot \{b,d\}^* \cdot \{c,d\}^*\\
   L_2 &:= \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}\\
   L_3 &:= \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a,b,c,d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\}\\
   L_4 &:= L_2 \cup L_3
   \end{aligned}$$
   Welche der Sprachen $L_1, \ldots, L_4$ besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen $L_1, \ldots, L_4$ sind kontextfrei?
   Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen $L_1, \ldots, L_4$?

Aufgabe 19
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Jede reguläre Sprache hat die kontexfreie Pumping-Eigenschaft.
3. Es gibt eine Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat, aber nicht die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat.
4. Jede Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat, hat auch die kontexfreie Pumping-Eigenschaft.
5. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat, hat auch die reguläre Pumping-Eigenschaft.
6. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat ist regulär.