Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer,   Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Besprechung in KW 47 / Abgabe in KW 48

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 15, 16, 17 und 18

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

Aufgabe 4
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus (bezüglich der Konkatenation). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$
7. $h(L \cdot R) = h(L) \cdot h(R)$
8. $h(L \cdot R) = h(L) \cup h(R)$

Hinweis: Außer bei den Teilaufgaben 7 und 8 wird die Homomorphieeigenschaft nicht gebraucht. Die Teilaufgaben benötigen nur, dass h eine totale Funktion ist.

Aufgabe 5
Beweisen Sie mit Hilfe von endlichen Automaten, dass die regulären Sprachen unter Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind. Verwenden Sie im Beweis weder reguläre Ausdrücke noch Grammatiken.
Hinweis: Sei h ein Homomorphismus. Angenommen, L werde vom deterministischen endlichen Automaten M erkannt. Wir erhalten einen endlichen Automaten für $h(L)$, wenn vom Zustand p mit dem Zeichen a in den Zustand q übergegangen wird, der beim Automaten M von p aus mit $h(a)$ erreicht wird. Umgekehrt erhalten wir einen endlichen Automaten für $h^{-1}(L)$, wenn es von p aus einen Pfad für $h(a)$ nach q gibt, falls von p mit a nach q übergegangen wird.
Definition: $h(L) := \{h(x) \mid x \in L\}$, $h^{-1}(L) := \{x \mid h(x) \in L\}$

Aufgabe 6

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^* mit:

$$h(a) = ab \qquad g(a) = a$$
$$h(b) = ba \qquad g(b) = c$$
$$h(c) = ccc \qquad g(c) = \lambda$$

1. Geben Sie $h(L)$, $g(L)$, $h^{-1}(L)$ und $g^{-1}(L)$ für folgende Sprachen L_i an $(i = 1, 2, 3)$:

$$L_1 := \{acccaa, ababba, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in N\}, \quad L_3 := \{wccc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	5	6	7	8
a	$2,5$	5	$-$	$-$	$-$	7
b	$-$	2	2	$-$	$-$	$-$
c	$-$	6	$-$	7	$7,8$	8

Konstruieren Sie NFAs die $h(L(M))$, $g(L(M))$, $h^{-1}(L(M))$ und $g^{-1}(L(M))$ erkennen.

Aufgabe 7

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ L und R reguläre Sprachen über Σ sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^*. Zeigen Sie, dass dann auch $g\left(h^{-1}(L) \cap R\right)$ regulär ist. [Sie dürfen selbstverständlich die in der Vorlesung gezeigten Sätze benutzen.]

Aufgabe 8

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie Grammatiken für folgende Sprachen über Σ an

$$\emptyset,\ \{\lambda\},\ \emptyset^*,\ \{\lambda\}^*,\ \{a, b, c\}^*,\ \{a, b\}^+,\ \{a, b, c\},\ \{abc\},\ \{a, b, c\}^3$$

Aufgabe 9

Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$L_1 := \{a^{2n} c b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_2 := \{w \in \{a, b, c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\}$$
$$L_3 := \{wv \mid v \in \{c\}^*,\ w \in \{a, b\}^*,\ |w| = |v|\}$$
$$L_4 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\}$$
$$L_5 := L_1 \cup L_2$$
$$L_6 := L_3 \cdot L_4$$

Aufgabe 10

Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines deterministischen finiten Automaten A feststellt, ob das Komplement der erkannten Sprachen $L(A)$ unendlich ist.

Aufgabe 11

Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe zweier nichtdeterministischer finiter Automaten A_1 und A_2 feststellt, ob die erkannten Sprachen $L(A_1)$ und $L(A_2)$ gleich sind.

Aufgabe 12

Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man zu einem regulären Ausdruck α über einem Alphabet Σ einen regulären Ausdruck für $\overline{\mathcal{L}(\alpha)} = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\alpha)$ erzeugen kann.

Aufgabe 13

Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines nichtdeterministischer finiten Automaten A feststellt, ob die erkannte Sprachen $L(A)$ leer, endlich oder unendlich ist.

Aufgabe 14 (für gute Studierende)

Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache über $\Sigma = \{a\}$. Zeigen Sie, dass L^* regulär

Aufgabe 15
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$L_1 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i \neq j\}$$
$$L_2 := \{wcvc\overleftarrow{w} \mid w, v \in \{a, b\}^+\}$$
$$L_3 := \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe 16
Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bbaab \text{ nicht}\} \\ L_2 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \lor \#_b(w) \bmod 3 = 0\} \\ L_3 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \land \#_b(w) \bmod 3 = 0\} \end{aligned}$$

Aufgabe 17
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$

Aufgabe 18
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten einen deterministischen vollständigen endlichen Automaten $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$. Die zu M gehörende Rechtskongruenzrelation $\sim_M$ auf Σ^* habe als Äquivalenzklassen:

$$\{\lambda\}, \{a\}, \{b\}, \{aa\}, \{ab, ba\}, \{bb\}, \{bb\}\cdot\Sigma^{\geq 1}, \{ba, ab\}\cdot\Sigma^+,$$
$$\{aa\}\cdot\{w \in \Sigma^+ \mid |w| \text{ gerade}\}, \{aa\}\cdot\{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ungerade}\}$$

Weiterhin akzeptiert M u.a. die Wörter b^0, a^1, b^2, ba sowie a^{4711}, und M verwirft u.a. die Wörter b, aa, b^{21}, bab sowie a^{42}.

1. Bestimmen Sie δ, s und F des Automaten M. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise. Geben Sie auch eine graphische Darstellung des Automaten an.
2. Bestimmen Sie die Klassen der zu $L(M)$ gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L(M)}$ auf Σ^*. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.