Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer,   Dr. Gengler

Aufgabenblatt 11

Besprechung in KW 02 / Abgabe in KW 03

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 17, 18 und 19

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

Aufgabe 4
Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist entscheidbar.
2. L und $\overline{L}$ sind semi-entscheidbar.
3. Es gibt eine Turingmaschine, die akzeptierend stoppt falls $x \in L$, und verwerfend stoppt, falls $x \notin L$.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare streng-monoton steigende Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder L ist endlich.
5. Die charakteristische χ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 5
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Menge der abzählbaren Sprachen über Σ ist überabzählbar.
2. Die Menge der aufzählbaren Sprachen über Σ ist abzählbar.
3. Es gibt nicht-aufzählbare Sprachen über Σ.

Aufgabe 6
Seien $L, L' \subseteq \{a, b\}^*$. Zeigen Sie:

1. Sind L und L' aufzählbar, so ist auch $L \cup L'$ aufzählbar.
2. Sind L und L' semi-entscheidbar, so ist auch $L \cap L'$ aufzählbar.
3. Sind L und L' aufzählbar, so ist auch $L \cdot L'$ aufzählbar.
4. Ist L aufzählbar, so ist auch L^* aufzählbar.
5. Ist L entscheidbar, so ist L aufzählbar.

Aufgabe 7
Geben Sie eine Turing-Maschine M an, die $\text{bin}(n)$ nach $\text{hex}(n)$ überführt, wobei $\text{hex}(n)$ die Hexadezimaldarstellung von n ist (niederwertige Stellen hinten). Geben Sie einen Lauf von M auf dem Wort 11110100101 an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise und Ihr Programm!

Aufgabe 8
Geben Sie Turing-Maschinen an, die aus einem Bandinhalt der Form $w_1\Box w_2\Box\cdots\Box w_k$ (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ($\Box$) getrennt) die folgenden Bandinhalte erzeugen ($w_1, w_2, \ldots, w_k \in \{0,1\}^+$):

1. $w_1\Box w_2\Box\cdots\Box w_k\Box w_1$.
2. $w_1\Box w_2\Box\cdots\Box w_{k-1}\Box w_k\Box w_1\Box w_2\Box\cdots\Box w_{k-1}\Box w_k$.
3. $w_1\Box w_3\Box w_5\Box\cdots\Box w_n$ mit $n = \begin{cases} k-1 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$
4. $w_1\Box w_2\Box w_1\Box w_3\Box w_1\Box w_4\Box\cdots\Box w_{k-1}\Box w_1\Box w_k$.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 9
Geben Sie eine Turing-Maschine an, die aus einem Bandinhalt der Form $w_1\Box w_2\Box\cdots\Box w_k$ (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ($\Box$) getrennt. $w_1, w_2, \ldots, w_k \in \{0,1\}^+$) den Bandinhalt $w_1\Box w_2\Box\cdots\Box w_{k-1}\Box w_k\Box w_k\Box w_{k-1}\Box\cdots\Box w_2\Box w_1$ erzeugt.

Aufgabe 10
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist abzählbar.
2. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist abzählbar.
4. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist abzählbar.
5. Jede Obermenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.
6. Jede Obermenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.
7. Jede Teilmenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.

Aufgabe 11
Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist rekursiv aufzählbar.
2. L ist semi-entscheidbar.
3. $L = \mathrm{Bild}(f)$ für eine totale injektive berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder L ist endlich.
4. $L = \mathrm{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to \Sigma^*$ oder $L = \emptyset$.
5. $L = \mathrm{Bild}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
6. $L = \mathrm{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
7. Die semi-charakteristische φ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 12
Seien $A_1, \ldots A_n$ paarweise disjunkte, aufzählbare Teilmengen von $\{0,1\}^*$ und sei A die Vereinigung der Mengen $A_1, \ldots, A_n$. Zeigen Sie: Falls A entscheidbar ist, dann sind auch alle Mengen A_i entscheidbar $(i = 1, \ldots, n)$.

Aufgabe 13
Zeigen Sie: L entscheidbar $\Rightarrow$ $\overline{L}$ entscheidbar

Aufgabe 14
Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für $\{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ an.

Aufgabe 15
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren $L := \{wc^i \mid w \in \Sigma^* \wedge i \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq i \leq |w|\}$. Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für L an.

Aufgabe 16
Zeigen Sie:

1. Zu jeder unendlichen aufzählbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschieden Funktionen f, die L aufzählen.
2. Zu jeder semi-entscheidbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschieden Turingmaschinen M, die L semi-entscheiden.
3. Zu jeder entscheidbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschieden Turingmaschinen M, die L entscheiden.

Aufgabe 17
Sei f eine Funktion aus Σ^* nach Σ^*. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. f berechenbar $\Longrightarrow$ Bild(f) aufzählbar.
2. f berechenbar $\Longrightarrow$ Def(f) aufzählbar.
3. f berechenbar und total $\Longrightarrow$ Bild(f) entscheidbar.
4. f berechenbar und total $\Longrightarrow$ Def(f) entscheidbar.

Aufgabe 18
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist aufzählbar.
2. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede aufzählbare Sprache hat eine entscheidbare Teilmenge.
4. Jede Teilmenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.

Aufgabe 19
Ist die Klasse REC der entscheidbaren Sprachen abgeschlossen unter Schnitt, Vereinigung, Komplementbildung, Konkatenation, Iteration(*-Bildung)? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.
