Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 1

Besprechung in KW 42 / Abgabe in KW 43

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 12, 13 und 14

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen. Stecken Sie Ihre Fernsprecheinrichtungen zu Beginn der Übung in eine Tasche und nehmen Sie diese erst nach Ende des Blocks wieder heraus.

Aufgabe 4
Sei Q die Menge der Bundesländer der Bundesrepublik Deutschland, und K die Menge der Paare $(a, b) \in Q \times Q$ für die das Bundesland a und das Bundesland b eine gemeinsame Grenze haben. Ist die Relation K reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, transitiv?

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung!

Hinweis: `http://de.wikipedia.org/wiki/Deutschland`

Aufgabe 5
Geben Sie für jede der folgenden Relationen an, welche der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch und transitiv auf sie zutreffen. Die Relationen seien jeweils über der Menge der Deutschen definiert.

1. x hat den gleichen Vater wie y.
2. x und y haben ein gemeinsames Kind.
3. x ist Vorfahre von y.

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung!

Aufgabe 6
Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig (in Zeichen $|A| = |B|$) genau dann, wenn es eine Bijektion (total, injektiv, surjektiv) von A auf B gibt.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\{0, 1\}^*$ gleichmächtig sind.
3. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ und $[0; 1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ gleichmächtig sind.
   Hinweis: Denken Sie an z. B. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{x}$.
4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig sind.

Aufgabe 7
Sei A eine Menge und $\mathcal{P}(A)$ die zugehörige Potenzmenge. Auf $\mathcal{P}(A)$ definieren wir die symetrische Differenz $\triangle$ vermöge:

$$B \triangle C := (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Aufgabe 8
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie reguläre Ausdrücke für folgende Sprachen an:

$$\emptyset \ , \ \{\lambda\} \ , \ \Sigma \ , \ \Sigma^* \ , \ \Sigma^+$$

Aufgabe 9
Geben Sie einen regulären Ausdruck für die folgende Sprache an:

$$L := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } abba \text{ oder } \#_a(w) \text{ ist nicht durch 4 teilbar}\}$$

Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!
Notation: $\#_a(w)$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Zeichens a im Wort w.

Aufgabe 10
Sei A eine beliebige Wortmenge über dem endliihen Alphabet Σ. Zeigen Sie:

1. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $A \cdot A^i = A^i \cdot A$
2. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\{\lambda\}^i = \{\lambda\}$
3. Für $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt: $\emptyset^i = \emptyset$
4. $\emptyset^* = \{\lambda\}$

Aufgabe 11
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0, 1\}^*$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussagen!

1. $\emptyset = \{\emptyset\}$,
2. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
3. $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup B$,
4. $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$,
5. $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$,
6. $(A^*)^* = A^*$,
7. $(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^*$,
8. $(A \cdot B)^* = (A \cup B)^*$.

Aufgabe 12
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0, 1\}^*$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussage!

1. $A^+ \subseteq A^*$,
2. $(A \cap B)^* \supseteq (A^* \cap B^*)$,
3. $(A \cdot B)^* = (B \cdot A)^*$.

Aufgabe 13
Seien A eine beliebige Teilmenge von $\{0, 1\}^*$. Zeigen Sie:

$$\lambda \in A^+ \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in A$$

Aufgabe 14
Auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten wir diem Relation R definiert durch:

$$iRj \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall k \in \mathbb{N} \, \text{mit} \, k \, \text{Primzahl}\colon k|i \Longrightarrow k|j)$$

Welche der folgenden Eigenschaften besitzt R :reflexiv, symetrisch, asymetrisch, antisymetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten!