Algebraische Rechenmodelle

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 6
15. Januar 2019

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass das Innere A° und der Abschluss A^- einer semi-algebraischen Menge in $\mathbb{R}^n$ auch semi-algebraisch sind.

(b) Sei $A := \{x \in \mathbb{R}^n | p_i(x) = 0, 1 \leq i \leq s; q_j(x) \geq 0, 1 \leq i \leq r\}$ eine einfache semi-algebraische Menge. Zeigen Sie, dass A als Projektion einer *algebraischen* Menge $Y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ auf die ersten n Komponenten dargestellt werden kann. Hierfür sollte m passend gewählt werden. Eine Menge ist genau dann algebraisch, wenn sie die Nullstellenmenge einer endlichen Familie von Polynomen ist (also nur $=$ und kein $\geq$).

Aufgabe 2.

Betrachten wir die Existenz von Nullstellen in multivariaten Polynomen mit Grad kleiner gleich drei. Dazu sei $F^{=d} := \{f | \exists n \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n], \mathrm{grad}(f) = d\}$, $d \in \mathbb{N}$.

(a) Warum haben alle Polynome mit echtem Grad 1 und 3, also $F^{=1}$ und $F^{=3}$, immer eine Nullstelle? Tip: Für Polynome aus $F^{=3}$ einen Richtungsvektor wählen und das Verhalten des Polynoms entlang dieses Vektors betrachten.

(b) Wie kann für Polynome aus $F^{=2}$ entschieden werden, ob sie eine Nullstelle haben? Diese Polynome entsprechen quadratischen Formen $f(x) = x^T Ax + b^T x + c$ mit einer symmetrischen Matrix A und Vektoren x, b und c. Entscheidend ist das Verhalten des dominanten Terms $x^T Ax$. Wie kann einfach festgestellt werden, ob diese Matrix positiv oder negativ definit, semi-definit oder indefinit ist? Was ist in den jeweiligen Fällen zu untersuchen?

(c) Für $F^{=2}$ kann auch eine andere Strategie benutzt werden: Schritt für Schritt wird eine Variable eliminiert, indem die restlichen als fest angenommen werden. Wir betrachten also die quadratischen Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}^{n-1}$ und deren Disrkiminante. Beschreiben Sie das Entscheidungsverfahren. Hinweis: Die Diskriminante ist eine stetige Funktion in den restlichen Variablen und ist maximal von Grad 2 (warum?).

(d) Sei $F_0^{=d} := \{f \in F^{=d} | \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ und } f(x) = 0\}$. Zeigen sie, dass $(F^{=2}, F_0^{=2})$ in $\mathrm{P}_\mathbb{R}$ liegt.

Aufgabe 3.

Zeigen Sie durch Reduktion, dass die Menge

$$QS_{\mathrm{zero}} := \{(f_1, \dots, f_s) | f_i \in F^{\leq 2} \wedge \text{ die } f_i \text{ haben eine gemeinsame Nullstelle}\}$$

$\mathrm{NP}_\mathbb{R}$-vollständig ist. Hierbei handelt es sich im Gegensatz zur vorherigen Aufgabe um ein Polynomsystem statt eines einzelnen Polynoms.