Algebraische Rechenmodelle

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 5
18. Dezember 2018

Aufgabe 1.
Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^\infty$ zwei Entscheidungsprobleme über $\mathbb{R}^\infty$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $B \in \mathrm{P}_\mathbb{R}$ und $A \preceq_{\mathrm{poly}} B$, dann ist auch $A \in \mathrm{P}_\mathbb{R}$.

(b) Wenn $B \in \mathrm{NP}_\mathbb{R}$ und $A \preceq_{\mathrm{poly}} B$, dann ist auch $A \in \mathrm{NP}_\mathbb{R}$.

(c) Sei A $\mathrm{NP}_\mathbb{R}$-vollständig ist, $B \in \mathrm{NP}_\mathbb{R}$ und gelte $A \preceq_{\mathrm{poly}} B$. Dann ist auch B $\mathrm{NP}_\mathbb{R}$-vollständig.

(d) Für alle $A, B \in \mathrm{P}_\mathbb{R}$ gilt: $A \preceq_{\mathrm{poly}} B$. Dabei sollte $B \neq \emptyset$ und $B \neq \mathbb{R}^\infty$ sein.

(e) Die Relation $\preceq_{\mathrm{poly}}$ ist reflexiv und transitiv.

(f) Für den Fall, dass ein $\mathrm{NP}_\mathbb{R}$-vollständiges Problem existiert, so ist $\mathrm{P}_\mathbb{R} = \mathrm{NP}_\mathbb{R}$ genau dann, wenn ein $\mathrm{NP}_\mathbb{R}$-vollständiges Problem in $\mathrm{P}_\mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass folgendes Entscheidungsproblem $\mathrm{NP}_\mathbb{R}$-vollständig ist. Dazu wird eine universelle BSS-Maschine benötigt, der "geratene" Vektor $z \in \mathbb{R}^\infty$ ist wie bei allen nichtdeterministischen BSS-Maschinen von außen vorgegeben.

$$\begin{aligned}\mathrm{Sim} := \{(\mathbf{c}, \mathbf{y}, \mathbf{1}) \in \mathbb{R}^\infty \quad | \quad & \mathbf{c} \text{ ist der Code einer } \mathrm{NP}_\mathbb{R}\text{-Maschine} \\ & \wedge M_\mathbf{c} \text{ akzeptiert } \mathbf{y} \text{ in } \leq t \text{ Schritten} \\ & \wedge \mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^t\}\end{aligned}$$

Aufgabe 3.
Es sei co-$\mathrm{NP}_\mathbb{R}$ die Klasse der Entscheidungsprobleme A, deren Komplemente $\bar{A} = \mathbb{R}^\infty \setminus A$ in $\mathrm{NP}_\mathbb{R}$ liegen. Ein Entscheidungsproblem B ist co-$\mathrm{NP}_\mathbb{R}$-vollständig, wenn jedes $A \in$ co-$\mathrm{NP}_\mathbb{R}$ in poly-zeit auf B reduzierbar ist, also $A \preceq_{\mathrm{poly}} B$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) A ist $\mathrm{NP}_\mathbb{R}$-vollständig $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ ist co-$\mathrm{NP}_\mathbb{R}$-vollständig

(b) $\mathrm{P}_\mathbb{R} \subseteq \text{co-}\mathrm{NP}_\mathbb{R} \cap \mathrm{NP}_\mathbb{R}$

(c) $\mathrm{P}_\mathbb{R} = \text{co-}\mathrm{NP}_\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{P}_\mathbb{R} = \mathrm{NP}_\mathbb{R}$

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ nicht BSS-entscheidbar im BSS-Modell über $\mathbb{C}$ sind. Beachten Sie dabei, dass in diesem Modell nur arithmetische Operation und Tests auf $z = 0$? erlaubt sind und Entscheidungsalgorithmen eine endliche Laufzeit haben müssen. Hinweis: Betrachten Sie, für welche Zahlen die dabei auftretenden Tests auf jeden Fall negativ ausfallen müssen. Nehmen Sie eine dieser Zahlen als z^* und betrachten Sie den zugehörigen Entscheidungsbaum. Wie viele $z \in \mathbb{C}$ kann es geben, die nicht den selben Pfad wie z^* durchlaufen?