

Algebraische Rechenmodelle

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 4
4. Dezember 2018

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass

- (a) jede Menge $S \subseteq \mathbb{N}$ BSS-entscheidbar über \mathbb{R} ist,
- (b) \mathbb{Q} BSS-erkennbar über \mathbb{R} ist und
- (c) \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^2 BSS-entscheidbar über \mathbb{R} sind.

Aufgabe 2.

Gegeben zwei BSS-Maschinen M_1 und M_2 über $(\mathbb{R}, +, *, :, \geq 0)$, welche die Funktionen $\Phi_{M_1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\Phi_{M_2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ berechnen. Wie lässt sich eine Maschine M zur Berechnung von $\Phi_M(x_1, \dots, x_m) = \Phi_{M_2}(\Phi_{M_1}(x_1, \dots, x_m))$ konstruieren?

Aufgabe 3.

Gegeben zwei BSS-Maschinen M_1 und M_2 , welche die partiellen Funktionen $\Phi_{M_1}, \Phi_{M_2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ berechnen. Wie lässt sich eine Maschine M konstruieren, welche die Berechnungen von M_1 und M_2 parallel ausführt, bis eine der beiden hält?

Aufgabe 4.

Beweisen Sie:

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist BSS-entscheidbar genau dann, wenn A und $\mathbb{R}^n \setminus A$ BSS-erkennbar sind.

Aufgabe 5.

- (a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ BSS-entscheidbar ist. Der Graph einer Funktion ist die Menge $\{(x, y) | y = f(x)\}$.
- (b) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ auf keinem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit einer rationalen Funktion übereinstimmt. Nehmen Sie dazu $e^x = p(x)/q(x)$ für alle $x \in I$ an. Multiplizieren Sie mit $q(x)$ und betrachten Sie die Ableitungen höherer Ordnung auf beiden Seiten.
- (c) Beweisen Sie das gleiche Ergebnis für die Quadratwurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$. Dazu sei der Grad einer rationalen Funktion p/q definiert als $\text{grad}(p) - \text{grad}(q) \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie nun:
 - 1. Für $f \in \mathbb{R}(x)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\text{grad}(f^n) = n \text{grad}(f)$
 - 2. Wenn $x \mapsto \sqrt{x}$ rational ist, wäre sein Grad keine ganze Zahl.
- (d) Zeigen Sie, dass die Quadratwurzelfunktion und die Exponentialfunktion nicht BSS-berechenbar in $(\mathbb{R}, +, -, *, :, \geq 0)$ sind.