Algebraische Rechenmodelle

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 3
13. November 2018

Aufgabe 1.
Wir betrachten den Teilraum $< 1, p_0, \ldots, p_n, q_0, \ldots, q_m, h_0, \ldots, h_s >_K$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ des Polynomrings $K[p_0, \ldots, p_n, q_0, \ldots, q_m, h_0, \ldots, h_s]$. Wie sind die h_i in der Vorlesung aus den $p_0, \ldots, p_n, q_0, \ldots, q_m$ definiert? Zeigen Sie für ein h_i, dass es linear unabhängig von den anderen Basispolynomen ist.

Aufgabe 2.
Finden Sie ein effizientes Berechnungsschema (straight-line Programm) zum Auswerten das Polynoms $p(x) = 3x^6 + 2x^5 + x^4 - 2x^2 - 2x - 2 \in \mathbb{R}[x]$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mittels Präkonditionierung. Dazu sollten 3 nicht-skalare Multiplikationen, 2 Multiplikationen mit ganzen Zahlen und 6 Additionen genügen.

Aufgabe 3.
Wiederholen Sie die Definitionen folgender Begriffe: Lineares Erzeugnis, Linearkombinationen und die Basis eines Vektorraumes. Welche Vektoren liegen in $< (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) >_{\mathbb{R}}$? Welche Polynome liegen z.B. in $< 1, x, x^2 >_{\mathbb{R}}$ und welche nicht?

Aufgabe 4.
Zeigen Sie: sei $a \in \mathbb{R}$ eine algebraische Zahl und sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ das Minimalpolynom von a. Sei $g \in \mathbb{Q}[x]$ irgendein Polynom mit $g(a) = 0$. Dann gilt$f|g$, d.h. es gibt ein Polynom $q \in \mathbb{Q}[x]$ mit $g = q \cdot f$.
Dabei gilt: Das **Minimalpolynom von** a ist das normierte Polynom $\neq 0$ mit dem kleinsten Grad aus $\mathbb{Q}[x]$, das a als Nullstelle hat.

Aufgabe 5.

(a) Wie ist ein Unterkörper eines Körpers definiert?

(b) Sei K ein Unterkörper eines Körpers L. Zeigen Sie, dass dann L ein Vektorraum über dem Körper K ist.

Aufgabe 6.

(a) Sind $\sqrt{3}$ und π algebraische Zahlen? Falls ja, finden Sie jeweils das Minimalpolynom.

(b) Bestimmen Sie die Dimensionen der Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(\pi)$.

Aufgabe 7.
Gegeben seien die Polynome: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 3x^3 - 3x^2 + x - 1 \in \mathbb{R}[x]$.

(a) Finden sie die Resultante von f und g.

(b) Haben die beide Polynome eine gemeinsame Nullstelle? Falls ja, dann finden Sie alle gemeinsamen Nullstellen.