Algebraische Rechenmodelle

Prof. Dr. Klaus Meer, Ameen Naif

Aufgabenblatt 2
30. Oktober 2018

Aufgabe 1.

(a) Gegeben $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n = 1$. Finden Sie eine obere Schranke $M = M(a_0, \ldots, a_n)$, $M \in \mathbb{R}$, sodass jede Nullstelle $x^* \in \mathbb{C}$ von p (also $p(x^*) = 0$) durch M beschränkt ist, d.h. $|x^*| \leq M$.

(b) Beweisen Sie, dass die Existenz einer ganzzahligen Nullstelle für ein gegebenes Polynom entscheidbar ist.

Aufgabe 2.

Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 - x + 1$ aus $\mathbb{R}[x]$.

(a) Wenden Sie den Satz von Sturm an, um die Anzahl der verschiedenen reellen Nullstellen von $p(x)$ in $\mathbb{R}$ zu bestimmen.

(b) Hat $p(x)$ ganzzahlige Nullstellen? Warum?

(c) Wie viele reelle Nullstellen hat dieses Polynom maximal nach der Regel von Descartes und ist die Anzahl ungerade?

Aufgabe 3.

Gegeben sei ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$. Beweisen Sie, dass der Quotient von p/g mit einem $g \in \mathrm{ggT}(p, p')$ dieselbe Anzahl verschiedener Nullstellen hat wie p. Dazu kann es helfen, die Polynome in ihrer Faktorisierung $(x-x_1)^{\alpha_1} \cdots (x-x_n)^{\alpha_n}$ mit (möglicherweise komplexen) Nullstellen x_i und Vielfachheiten $\alpha_i \in \mathbb{N}$ zu betrachten.

Aufgabe 4.

Wie könnten Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus für Polynome entscheiden, ob ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ eine mehrfache (komplexe) Nullstelle hat.

Aufgabe 5.

(a) Was ist eine Gruppe, abelsche Gruppe, Ring, Ring mit neutralem Element, Körper? Finden Sie Beispiele.

(b) Wie ist ein Vektorraum definiert?

(c) Definieren Sie den Ring $\mathbb{R}[u_1, ..., u_s]$, zeigen Sie, dass er ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Wie lautet seine Dimension?

(d) Definieren Sie den Körper $\mathbb{R}(x)$ und den Ring $\mathbb{R}(x)[u_1, ..., u_s]$, zeigen Sie, dass $\mathbb{R}(x)[u_1, ..., u_s]$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}(x)$ ist.