

Strukturelle Komplexitätstheorie

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

Schlagen Sie die Regel von (de) L'Hôpital nach.

Aufgabe 2

Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihren Wachstumseigenschaften:

$\log n$, $\sqrt{\log n}$, \sqrt{n} , $(\log \sqrt{n})^2$, $\frac{n}{\log n}$, n^2 , n^k (für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$), $n^{\log n}$, $n^{\log \log n}$, $\log(n^2)$, $(\log n)^2$, n^n , $\log \log \log n$, $\sum_{i=0}^n i$, $\sum_{i=0}^n i^2$, $2^{n \log n}$, $(\sqrt{\log n})^{\log \log n}$.

Beweisen Sie jeweils die entsprechenden \mathcal{O} - bzw. \mathfrak{o} -Beziehungen.

Aufgabe 3

Zeigen Sie: $\mathcal{O}(\log) = \mathcal{O}(\log_{10}) = \mathcal{O}(\ln) = \mathcal{O}(\log(2n)) = \mathcal{O}(\log(n + \log(n))) = \mathcal{O}(\log(n^2))$

Aufgabe 4

Sei \mathcal{F}_{tot} die Menge der totalen Funktionen von \mathbb{N}_0 nach \mathbb{N}_0 . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen ($f, g \in \mathcal{F}_{\text{tot}}$): ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

1. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{O}(h)$
2. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathfrak{o}(h) \implies f \in \mathfrak{o}(h)$
3. $f \in \mathfrak{o}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathfrak{o}(h)$
4. Die Relation $R_{\mathcal{O}} := \{(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \mathcal{O}(g)\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge \mathcal{F}_{tot} der totalen Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} .
5. Die Relation $R_{\mathfrak{o}} := \{(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \mathfrak{o}(g)\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge \mathcal{F}_{tot} der totalen Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} .
6. Die Relation $R_{\Omega} := \{(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \Omega(g)\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge \mathcal{F}_{tot} der totalen Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} .

Aufgabe 5

Welche \mathcal{O} - bzw. \mathfrak{o} -Beziehungen gibt es zwischen den folgenden Funktionen?

$$f_1(n) := n^3$$

$$f_2(n) := \begin{cases} n^2 & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) := \begin{cases} n^5 & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ n^2 \cdot \log(n) & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$f_4(n) := \begin{cases} n^n & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ 2^{n \cdot \log(n)} \cdot \log(n) & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$f_5(n) := n!$$

Beweisen Sie die Eigenschaften.

Aufgabe 6

Beweisen oder widerlegen die folgenden Aussagen.

1. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus \mathfrak{o}(g) \implies g \in \mathcal{O}(f)$
2. Es gibt Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit: $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$
3. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus \mathfrak{o}(g) \implies f \in \Omega(g)$
4. $f \in \mathfrak{o}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f) \implies f \in \Omega(g)$

Aufgabe 7

Geben Sie Funktionen f und g (von \mathbb{N} nach \mathbb{N}) an, so dass weder $f \in \mathcal{O}(g)$ noch $g \in \mathcal{O}(f)$. Beweisen Sie diese Eigenschaften.