

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 9

Besprechung in KW 50 / Abgabe in KW 51

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

- Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
 - Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
 - Aufgaben 14, 15, 16 und 17

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Konstruieren Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 äquivalente Grammatiken, welche keine λ -Regeln (also keine Regeln der Form $A \rightarrow \lambda$ mit A Nonterminal) besitzen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

1. $G_1 := (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, \{C \rightarrow \lambda, A \rightarrow aD, B \rightarrow bb, C \rightarrow bCb, D \rightarrow CB, D \rightarrow aa\}, A)$,
2. $G_2 := (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A)$ mit
 $P = \{A \rightarrow aD, B \rightarrow C, B \rightarrow b, C \rightarrow bCb, C \rightarrow \lambda, D \rightarrow BCB, D \rightarrow aa\}$.

Aufgabe 4

Konstruieren Sie zu folgenden kontextfreien Grammatiken G_1 und G_2 äquivalente Grammatiken, welche keine λ -Regeln (also keine Regeln der Form $A \rightarrow \lambda$ mit A Nonterminal) und keine längenerhaltenden Regeln (also keine Regeln der Form $A \rightarrow B$ mit A, B Nonterminals) besitzen. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

1. $G_1 := (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, \{D \rightarrow \lambda, A \rightarrow aDD, B \rightarrow bb, C \rightarrow bCb, C \rightarrow a, D \rightarrow C, D \rightarrow B, D \rightarrow aa\}, A)$
2. $G_2 := (\{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow aD, B \rightarrow C, B \rightarrow b, C \rightarrow bCb, C \rightarrow B, C \rightarrow a, D \rightarrow BCB, D \rightarrow E, E \rightarrow A\}, A)$

Aufgabe 5

Konstruieren Sie zur der Grammatik $G_1 = (\{S, A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, B_3, C, C_1, C_2, C_3\}, \{a, b, c\}, P, S)$ eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

$$P := \{S \rightarrow aA \mid bB \mid cC, A \rightarrow A_1c \mid A_2A_1 \mid a, A_1 \rightarrow A_2 \mid aa, A_2 \rightarrow \lambda \mid bb, \\ B \rightarrow B_3, B_1 \rightarrow B_2 \mid a, B_2 \rightarrow B_3 \mid b, B_3 \rightarrow B_1 \mid c, \\ C \rightarrow C_1C_2C_3, C_1 \rightarrow C_1C_1C_1 \mid a, C_2 \rightarrow cC_2cC_2 \mid b, C_3 \rightarrow ccc \}$$

Aufgabe 6

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne λ -Regeln. Wir betrachten die folgenden Verfahren:

- (A) Solange es Regeln $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow \alpha$ gibt mit $A, B \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^+ \setminus N$, so dass $A \rightarrow \alpha$ noch nicht in der Regelmenge ist, füge die Regel $A \rightarrow \alpha$ zur Regelmenge hinzu.
- (B) Solange es Regeln $A \rightarrow \alpha B \beta$ und $B \rightarrow C$ gibt mit $A, B, C \in N$ und $\alpha \in (N \cup T)^*$, so dass $A \rightarrow \alpha C \beta$ noch nicht in der Regelmenge ist, füge die Regel $A \rightarrow \alpha C \beta$ zur Regelmenge hinzu.
- (C) Streiche alle Regeln $A \rightarrow B$ mit $A, B \in N$.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Das Verfahren (A) terminiert.
2. Das Verfahren (B) terminiert.
3. Durch Anwenden von (A) und danach (C) auf die Grammatik G erhält man eine zu G äquivalente Grammatik ohne Regeln der Form $A \rightarrow B$ mit $A, B \in N$.
4. Durch Anwenden von (B) und danach (C) auf die Grammatik G erhält man eine zu G äquivalente Grammatik ohne Regeln der Form $A \rightarrow B$ mit $A, B \in N$.

Hinweis: Betrachten Sie unter anderem die Grammatik $G = (\{A, B, C, D, E, S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow A, A \rightarrow B, B \rightarrow CD, C \rightarrow E, D \rightarrow F, E \rightarrow a, F \rightarrow b\}, S)$.

Aufgabe 7

Angenommen, wir nehmen folgende Änderungen in der Definition der kontextfreien Pumping-Eigenschaft vor:

1. “ $(\forall z \in L \text{ mit } |z| \geq k)$ ” durch “ $(\forall z \in L)$ ” ersetzen.
2. “ $(\forall z \in L \text{ mit } |z| \geq k)$ ” durch “ $(\forall z \in \Sigma^* \text{ mit } |z| \geq k)$ ” ersetzen.
3. Die Bedingung “ $vx \neq \lambda$ ” weglassen.
4. “ $(\forall i \in \mathbb{N}_0)$ ” durch “ $(\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ ” ersetzen.
5. “ $vx \neq \lambda$ ” durch “ $v \neq \lambda \wedge x \neq \lambda$ ” ersetzen
6. “ $(\forall i \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^iy$ ” durch “ $(\forall i, j \in \mathbb{N}_0) : uv^iwx^jy$ ” ersetzen.
7. “ $(\exists u, v, w, x, y \text{ mit } \dots)(\forall i \in \mathbb{N}_0)$ ” durch “ $(\forall i \in \mathbb{N}_0)(\exists u, v, w, x, y \text{ mit } \dots)$ ” ersetzen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Hinweis: Denken Sie bei 5. an $L = \{a^n b^n c^n d^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a, b, c\}^*$, und bei 7. an $L = \{b^j a^p b^p c^p \mid j \in \mathbb{N}_0, j \neq 0, p \in \mathbb{N}_0, p \neq 0\}$.

Aufgabe 8

Wir definieren die Wortfolge $(w_i \mid i \in \mathbb{N})$ induktiv vermöge $w_0 := \lambda$ und $w_{i+1} := w_i \cdot b \cdot a^i$ für $i \in \mathbb{N}$. Weiter sei $L := \{w_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Beweisen Sie:

1. $\{|w| \mid w \in L\} = \{\frac{n(n+1)}{2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
2. $\forall w \in L \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad \exists n \in \mathbb{N}_0 : (n > |w| \wedge L \cap \{v \in \{a, b\}^* \mid n \leq |v| \leq n + p\} = \emptyset)$.
3. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht.

Aufgabe 9

Beweisen Sie, dass die folgenden Sprachen L_i die kontextfreie Pumping-Eigenschaft nicht haben:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\ L_2 &= \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\ L_3 &= \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ L_4 &= \{a^m \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : n = m^2\} \\ L_5 &= \{a^p \mid p \text{ Primzahl}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei? Beweisen sie Ihre Aussagen!

$$\begin{aligned} L_1 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w = v\} \\ L_2 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, |w| = |v|\} \\ L_3 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq v\} \\ L_4 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq v, |w| = |v|\} \\ L_5 &= \{a, b\}^* \setminus \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ L_6 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w = \overleftarrow{v}\} \\ L_7 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, |w| = |\overleftarrow{v}|\} \\ L_8 &= \{wv \mid w, v \in \{a, b\}^*, w \neq \overleftarrow{v}\} \\ L_9 &= \{wvu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = v = u\} \\ L_{10} &= \{wcvcu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = v = u\} \\ L_{11} &= \{wvu \mid w, v, u \in \{a, b\}^*, w = \overleftarrow{v} = u\} \end{aligned}$$

Aufgabe 11

Sei Σ ein Alphabet, L eine kontextfreie Sprache über Σ , R eine reguläre Sprache über Σ und h ein Homomorphismus von Σ^* nach Σ^* . Zeigen Sie:

1. $L \cap R$ ist kontextfrei,
2. $h(L)$ ist kontextfrei,
3. $h^{-1}(L)$ ist kontextfrei

Aufgabe 12

$$\begin{aligned} \text{Sei: } L_1 &:= \{a, d\}^* \cdot \{b, d\}^* \cdot \{c, d\}^* \\ L_2 &:= \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \\ L_3 &:= \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a, b, c, d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\} \\ L_4 &:= L_2 \cup L_3 \end{aligned}$$

Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 sind kontextfrei?

Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen L_1, \dots, L_4 ?

Aufgabe 13 (für gute Studierende)

Sei $L := \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0 \wedge n \neq m\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. L hat nicht die reguläre Pumping-Eigenschaft.
2. L hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.

Hinweis: L ist nicht kontextfrei. Dies kann mit Hilfe von Ogdens Lemma nachgewiesen werden, gute Studierende können den Beweis versuchen. Die Anwendung von Ogdens Lemma ist nicht wesentlich schwieriger als die Anwendung des Pumping Lemmas. (Zu Ogdens Lemma siehe http://en.wikipedia.org/wiki/Ogden%27s_lemma, bzw. William Ogden: A Helpful Result for Proving Inherent Ambiguity, *Mathematical Systems Theory*, 2(3), pp. 191-194, 1968.

Aufgabe 14

$$\begin{aligned} \text{Sei: } L_1 &:= \{a, d\}^* \cdot \{b, d\}^* \cdot \{c, d\}^* \\ L_2 &:= \{w \in L_1 \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \\ L_3 &:= \{xyz \in L_1 \mid x, z \in \{a, b, c, d\}^* \wedge y \in \{ab, bc\}\} \\ L_4 &:= L_2 \cup L_3 \end{aligned}$$

Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 besitzen die kontextfreie Pumping-Eigenschaft? Welche der Sprachen L_1, \dots, L_4 sind kontextfrei?

Hinweis: Welche Rolle spielen die Zeichen d in den Sprachen L_1, \dots, L_4 ?

Aufgabe 15

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Jede reguläre Sprache hat die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.
3. Es gibt eine Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat, aber nicht die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat.
4. Jede Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat, hat auch die kontextfreie Pumping-Eigenschaft.
5. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat, hat auch die reguläre Pumping-Eigenschaft.
6. Jede Sprache, die die kontextfreie Pumping-Eigenschaft hat ist regulär.

Aufgabe 16

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und seien $L, R \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen über Σ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Sie dürfen die in der Vorlesung bewiesenen Sätze verwenden, müssen diese aber zitieren.

1. Keine Teilmenge einer kontextfreien Sprache ist regulär.
2. $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \wedge R \in \text{CFL} \implies L \cap R \in \text{CFL}$ (wobei $L, R \subseteq \Sigma^*$).
3. $L \in \text{CFL} \wedge R \in \text{CFL} \implies L \cap R \in \text{REG}$.
4. $L \in \text{CFL} \implies \Sigma^* \setminus L \notin \text{CFL}$.
5. Jede unendliche reguläre Sprache ist disjunkte Vereinigung zweier unendlicher regulärer Sprachen.
6. Es gibt kontextfreie nichtreguläre Sprachen, die disjunkte Vereinigung von zwei unendlichen kontextfreien Sprachen sind.
7. Die Vereinigung einer nicht-regulären Sprache mit einer kontextfreien Sprache ist nicht-regulär.
8. Zu jeder kontextfreien Sprache gibt es unendlich viele kontextfreie Grammatiken, die diese Sprache erzeugen.
9. Es gibt nur abzählbar unendlich viele kontextfreie Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$.

Aufgabe 17

Sei $L := \{w \in \{a, b\}^* \mid bb \text{ ist Teilwort von } w, \text{ oder } \#_a(w) \text{ ist Primzahl, oder } \#_b(w) = 0\}$. Zeigen Sie, dass L die kontextfreie Pumping-eigenschaft hat, aber nicht kontextfrei ist.