Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 8

Besprechung in KW 49 / Abgabe in KW 50

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13, 14, 15 und 16

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Geben Sie jeweils allgemeine Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{array}{lcl} L_1 & := & \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 & := & \{a^{n^2} b a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_3 & := & \{\text{bin}(n) \cdot a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_4 & := & \{\text{bin}(n)\$\,\text{bin}(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_5 & := & \{\text{bin}(n)\$\,\text{bin}(m)\$\{\text{bin}(n+m) \mid n, m \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

Notation: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\text{bin}(n)$ die Binärdarstellung von n, ohne führende Nullen, mit der niederwertigsten Ziffer hinten.

Aufgabe 4
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und $S' \notin N$ ein neues Nonterminal. Welche Sprache wird dann durch $G' = (N \cup \{S'\}\,,\, T\,,\, P \cup \{S' \to S, S' \to S'S'\}\,,\, S')$ erzeugt?

Aufgabe 5
Seien $G_1 = (N_1, T, P_1, S_1)$ und $G_2 = (N_2, T, P_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ und $(N_1 \cup N_2) \cap T = \emptyset$,und $S' \notin N$ ein neues Nonterminal. Welche Sprache wird dann durch $G' = (N_1 \cup N_2 \cup \{S'\}\,,\, T\,,\, P_1 \cup P_2 \cup \{S' \to S_1, S' \to S_2\}\,,\, S')$ erzeugt?

Aufgabe 6
Sei $L := \{w \in \{a, b\}^* \mid abab \text{ ist nicht Teilwort von } w\}$.

1. Geben Sie einen deterministischen finiten Automaten M für L an.
2. Konstruieren Sie zu M eine rechtslineare Grammatik G, die L erzeugt.
3. Konstruieren Sie zu M eine linkslineare Grammatik G', die L erzeugt.
4. Geben Sie für das Wort *abaabbabbabb* einen Ableitungsbaum bzgl. G und einen Ableitungsbaum bzgl. G' an.

Aufgabe 7
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G := (\{X\}, \{a, b\}, P, X)$ Pushdown-Automaten nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren, mit $P: \quad X \to XX \mid aXb \mid bXa \mid ab \mid ba$.
Sei $w := baabba$. Geben Sie alle Ableitungsbäume für w bezüglich der Grammatik G an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten jeweils Läufe auf dem Wort w an, die den verschiedenen Ableitungsbäumen entsprechenden. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 8
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit $N = \{S\}$, $T = \{(,), \text{⊕}, a, b, c, \cdot, \cup, ^*\}$ und

$$P = \{S \to (\text{⊕}), S \to (a), S \to (b), S \to (c), S \to (S \cdot S), S \to (S \cup S), S \to (S)^*\}.$$

Welche Sprache wird von der Grammatik G erzeugt?

Aufgabe 9
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation, Iteration, Homomorphismus, inversem Homomorphismus und Schnitt mit regulären Mengen.
   Hinweis: Benutzen Sie bei ,,Schnitt mit regulären Mengen" die Produktautomatenkonstruktion für einen erkennenden Keller-Automaten und einen endlichen Automaten, bei ,,Homomorphismus" erzeugende kontextfreie Grammatiken und bei ,,inversem Homomorphismus" erkennende Keller-Automaten.
2. Die Klasse CFL der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen unter Komplementbildung und Schnitt.

Aufgabe 10
Sei $P = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ ein nichtdeterministischer Kellerautomat (NPDA). Sei $\perp$ ein neues Zeichen, dass weder in Σ noch in Γ ist. Wir definieren:

$$\begin{array}{lcl}
L(P) & := & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\} \\
L_\lambda(P) & := & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in K \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^+ (p, \lambda, \lambda)\} \\
L_f(P) & := & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F\, \exists \alpha \in \Gamma^* \text{ mit } (q_0, w, \lambda) \vdash_P^* (p, \lambda, \alpha)\} \\
L_\perp(P) & = & \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F \text{ mit } (q_0, w, \perp) \vdash_P^* (p, \lambda, \lambda)\}
\end{array}$$

1. Gilt für jeden NPDA P, dass $L(P) = L_f(P)$ ist? (Begründung!)
2. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
   Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_f(P) = L$.
3. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
   Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_\perp(P) = L$.
4. Gilt für jeden NPDA P, dass $L(P) = L_\lambda(P)$ ist? (Begründung!)
5. Zeigen Sie: Für jeden NPDA P gilt: $\lambda \in L_\lambda(P)$
6. Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Gilt die folgende Aussage: Es gibt ein NPDA P mit $L(P) = L \iff$ es gibt ein NPDA P mit $L_\lambda(P) = L$.

Aufgabe 11
Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit:

$$P = \{S \to aA \mid bB \mid aS \mid bS\ ,\ A \to aA \mid bA \mid cC\ ,\ B \to aB \mid bB \mid cD\ ,$$
$$C \to cC \mid aF\ ,\ D \to cD \mid bF\ ,\ E \to aE \mid bE \mid \varepsilon\ ,\ F \to E\}$$

1. Konstruieren Sie einen finiten Automaten M zur Sprache $L(G)$.
2. Geben Sie für alle Klassen der Relation $R_{L(G)}$ jeweils einen die Klasse beschreibenden regulären Ausdruck an.
3. Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, der $L(G)$ beschreibt.
4. Konstruieren Sie eine linkslineare Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$.

Aufgabe 12
Zu einer kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ definieren wir:

$$\begin{array}{lll} N_{\text{erz}} & := & \{X \in N \mid \exists w \in T^* \ (X \xrightarrow{*} w)\} \quad \text{erzeugende Nonterminals} \\ N_{\text{err}} & := & \{X \in N \mid \exists \alpha, \beta \in (T \cup N)^* \ (S \xrightarrow{*} \alpha X \beta)\} \quad \text{erreichbare Nonterminals} \\ N_{\text{ntz}} & := & \{X \in N \mid \exists \alpha, \beta \in (T \cup N)^* \ \exists w \in T^* \ (S \xrightarrow{*} \alpha X \beta \xrightarrow{*} w\} \quad \text{nützliche Nonterminals} \end{array}$$

Geben Sie ein Verfahren an, das zu einer Grammatik $G = (N, T, P, S)$ die Mengen N_{erz}, N_{err} und N_{ntz} bestimmt.

1. Gilt im Allgemeinen $N_{\text{ntz}} = N_{\text{erz}} \cap N_{\text{err}}$?
2. Geben Sie ein Verfahren an, das entscheidet, ob $L(G) = \emptyset$ ist.
3. Gibt es zu jeder kontextfreien Grammatik G eine äquivalente Grammatik G', die nur nützliche Nonterminals besitzt?
4. Geben Sie ein Verfahren an das zu einer Grammatik G mit $L(G) \neq \emptyset$ eine äquivalente Grammatik G' erzeugt, die nur nützliche Nonterminals besitzt.
5. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die Grammatik $G := (\{A, B, C, D, E\}\ ,\ \{a, b\}\ ,\ P\ ,\ A)$ an, wo $P := \{A \to AC, A \to B, B \to bb, C \to CD, C \to a, C \to Ca, E \to aE, E \to aa\}$

Aufgabe 13
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Auf N ist die Relation $\backsim$ definiert vermöge

$$X \backsim Y \ :\Longleftrightarrow\ X \xrightarrow{*} Y \wedge Y \xrightarrow{*} X.$$

sowie auf $N/\backsim$ die Relation $\rightsquigarrow$ vermöge

$$A \rightsquigarrow B \ :\Longleftrightarrow\ \exists X \in A, \exists Y \in B \text{ mit } (X, Y) \in P.$$

Zeigen Sie, dass $\backsim$ eine Äquivalenzrelation und $\rightsquigarrow^*$ eine Ordnungsrelation ist. ($\rightsquigarrow^*$ ist die reflexiv transitive Hülle von $\rightsquigarrow$.)

Aufgabe 14
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie erkennende Kellerautomaten sowie erzeugende kontextfreie Grammaitiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{array}{l} L_1 := \{wv \mid v \in \{c\}^+,\ w \in \{a, b\}^*,\ |w| = |v|\} \\ L_2 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\} \\ L_3 := L_1 \cdot L_2 \end{array}$$

Aufgabe 15
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G := (\{S, A, B, C\}\ , \{a, b, c, d\}\ , P\ , S)$ Pushdown-Automaten nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren, wobei
$P := \{S \to AbS, S \to CAB, A \to cA, A \to a, B \to CBb, B \to b, C \to dd\}$.
Sei $w := ccabddcaddddbbb$. Geben Sie einen Ableitungsbaum B für w an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten jeweils einen dem Ableitungsbaum B entsprechenden Lauf auf dem Wort w an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 16
Sei $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \wedge (i = j \vee j = k)\}$.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für L an.
2. Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zu G einen Kellerautomaten P, der L erkennt.
3. Geben Sie für Ihre Grammatik G zum Wort $w = a^3 b^3 c^3$ alle Ableitungsbäume an.
4. Geben Sie zu jedem der Ableitungsbäume die entsprechenden Läufe auf w von P an.
