Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 7

Besprechung in KW 48 / Abgabe in KW 49

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13, 14, 15, 16 und 17

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Beweisen Sie mit Hilfe von endlichen Automaten, dass die regulären Sprachen unter Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind. Verwenden Sie im Beweis weder reguläre Ausdrücke noch Grammatiken.
Hinweis: Sei h ein Homomorphismus. Angenommen, L werde vom deterministischen endlichen Automaten M erkannt. Wir erhalten einen endlichen Automaten für $h(L)$, wenn vom Zustand p mit dem Zeichen a in den Zustand q übergegangen wird, der beim Automaten M von p aus mit $h(a)$ erreicht wird. Umgekehrt erhalten wir einen endlichen Automaten für $h^{-1}(L)$, wenn es von p aus einen Pfad für $h(a)$ nach q gibt, falls von p mit a nach q übergegangen wird.
Definition: $h(L) := \{h(x) \mid x \in L\}$, $h^{-1}(L) := \{x \mid h(x) \in L\}$

Aufgabe 4
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^* mit:
$$h(a) = ab \quad g(a) = a$$
$$h(b) = ba \quad g(b) = c$$
$$h(c) = ccc \quad g(c) = \lambda$$

1. Geben Sie $h(L)$, $g(L)$, $h^{-1}(L)$ und $g^{-1}(L)$ für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):
$$L_1 := \{acccaa, ababba, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in N\}, \quad L_3 := \{wccc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$
2. Sei $M = (\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	5	6	7	8
a	2, 5	5	–	–	–	7
b	–	2	2	–	–	–
c	–	6	–	7	7, 8	8

Konstruieren Sie NFAs die $h(L(M))$, $g(L(M))$, $h^{-1}(L(M))$ und $g^{-1}(L(M))$ erkennen.

Aufgabe 5
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ L und R reguläre Sprachen über Σ sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^*. Zeigen Sie, dass dann auch $g\left(h^{-1}(L) \cap R\right)$ regulär ist. [Sie dürfen selbstverständlich die in der Vorlesung gezeigten Sätze benutzen.]

Aufgabe 6
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie Grammatiken und erkennende (nicht-deterministischen) Kellerautomaten für folgende Sprachen über Σ an

$$\emptyset,\ \{\lambda\},\ \emptyset^*,\ \{\lambda\}^*,\ \{a,b,c\}^*,\ \{a,b\}^+,\ \{a,b,c\},\ \{abc\},\ \{a,b,c\}^3$$

Aufgabe 7
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
&L_1 := \{a^{2n}cb^n \mid n \in \mathbb{N}\}\\
&L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\}\\
&L_3 := \{wv \mid v \in \{c\}^*,\ w \in \{a,b\}^*,\ |w| = |v|\}\\
&L_4 := \{a^ib^j \mid i,j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\}\\
&L_5 := L_1 \cup L_2\\
&L_6 := L_3 \cdot L_4
\end{aligned}$$

Aufgabe 8
Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } abaab \text{ nicht}\}\\
L_2 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = 3\}\\
L_3 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 0 \vee \#_a(w) \bmod 3 = 2\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 9
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie erkennende (nicht-deterministische) Kellerautomaten sowie erzeugende kontextfreie Grammaitiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
&L_1 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}\\
&L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\}\\
&L_3 := L_1 \cup L_2\\
&L_4 := L_1 \cap L_2\\
&L_5 := L_1 \cdot L_2
\end{aligned}$$

Versuchen Sie jeweils, Keller-Alphabete mit wenigen Zeichen zu benutzen.

Aufgabe 10
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Jede kontextfreie Sprache hat die reguläre Pumping-Eigenschaft.
3. Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat.
4. Es gibt eine kontextfreie nicht-reguläre Sprache, die die reguläre Pumping-Eigenschaft hat.

Aufgabe 11
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Recherchieren Sie die Begriffe *endlich*, *abzählbar*, *abzählbar unendlich* und *überabzählbar.*
2. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist endlich.
3. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist abzählbar unendlich.
4. Die Klasse der kontextfreie Sprachen über $\{0,1\}^*$ ist überabzählbar unendlich.
5. Es gibt Sprachen über $\{0,1\}^*$, die nicht-kontextfreie sind.

Aufgabe 12
Konstruieren Sie zur kontextfreien Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ einen Pushdown-Automaten, wobei $P := \{S \to dSd, S \to dAd, A \to BC, B \to bb, C \to aCa, C \to cc\}$. Wenden Sie das in der Vorlesung vorgestellten Verfahren (Top-Down) an.
Sei $w := ddbbaaaccaaadd$. Geben Sie einen Ableitungsbaum B für w an. Geben Sie für den konstruierten Pushdown-Automaten einen dem Ableitungsbaum B entsprechenden Lauf auf dem Wort w an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise!

Aufgabe 13
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$L_1 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i \neq j\}$$
$$L_2 := \{wcvc\overleftarrow{w} \mid w, v \in \{a, b\}^+\}$$
$$L_3 := \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe 14
Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bbaab \text{ nicht}\} \\ L_2 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \vee \#_b(w) \bmod 3 = 0\} \\ L_3 &:= \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) \bmod 3 = 0\} \end{aligned}$$

Aufgabe 15
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$

Aufgabe 16
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten einen deterministischen vollständigen endlichen Automaten $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$. Die zu M gehörende Rechtskongruenzrelation $\sim_M$ auf Σ^* habe als Äquivalenzklassen:

$$\{\lambda\}, \{a\}, \{b\}, \{aa\}, \{ab, ba\}, \{bb\}, \{bb\}\cdot\Sigma^{\geq 1}, \{ba, ab\}\cdot\Sigma^+,$$
$$\{aa\}\cdot\{w \in \Sigma^+ \mid |w| \text{ gerade}\}, \{aa\}\cdot\{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ungerade}\}$$

Weiterhin akzeptiert M u.a. die Wörter b^0, a^1, b^2, ba sowie a^{4711}, und M verwirft u.a. die Wörter b, aa, b^{21}, bab sowie a^{42}.

1. Bestimmen Sie δ, s und F des Automaten M. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise. Geben Sie auch eine graphische Darstellung des Automaten an.
2. Bestimmen Sie die Klassen der zu $L(M)$ gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L(M)}$ auf Σ^*. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

Aufgabe 17
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie einen erkennenden deterministischen Kellerautomaten für die folgende Sprachen L_3 an: Das Keller-Alphabet soll weniger als drei Zeichen haben (das Bottom-Zeichen zählt ggf. nicht mit).

$$L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$$
$$L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid abaab \text{ ist Teilwort } w\}$$
$$L_3 := L_1 \cap L_2$$
