Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Besprechung in KW 47 / Abgabe in KW 48

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 13, 14, 15, 16, 17 und 18

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $\alpha = (a \cup aba)^* \cdot a$ ein regulärer Ausdruck über Σ und $L = \mathcal{L}(\alpha)$. Konstruieren Sie ein λ-NFA zu L, einen DFA zu L, einen DFA zu $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ sowie einen regulären Ausdruck zu $\overline{L}$. Beschreiben Sie das Konstruktionsverfahren.

Aufgabe 4
Seien $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ und $M'' = (Q'', \Sigma, \delta'', q_0'', F'')$ zwei NFA mit $Q' \cap Q'' = \emptyset$. Wir konstruieren den NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0', F)$ mit $Q = Q' \cup Q'' \setminus \{q_0''\}$, $\delta = \delta' \cup \{(f(q), a, f(p)) \mid (q, a, p) \in \delta''\}$, $F = F' \cup \{f(q) \mid q \in F''\}$, wobei

$$f : Q'' \longrightarrow Q'' \setminus \{q_0''\} \cup \{q_0'\} \quad \text{mit} \quad f(q) = \begin{cases} q & \text{falls} \quad q \neq q_0'', \\ q_0' & \text{falls} \quad q = q_0'' \end{cases}$$

(Die beiden Startzustände werden identifiziert.)
Erkennt im Allgemeinen M die Sprache $L(M') \cup L(M'')$?

Aufgabe 5
Welche Sprachen werden von den folgenden finiten Automaten A_k und B_k mit $k \in \mathbb{N}$ erkannt?

$$A_k := (\{0, \ldots, k\}, \{a, b\}, 0, \Delta_k, \{k\}) \text{ und}$$
$$B_k := (\{a, b\}^k, \{a, b\}, b^k, \Delta'_k, \{a\} \cdot \{a, b\}^{k-1})$$

wobei:

$$\Delta_k := \{(0, a, 0), (0, b, 0), (0, a, 1)\} \ \cup \ \{(i, x, i+1) \mid i \in \{1, \ldots, k-1\} \wedge x \in \{a, b\}\}$$
$$\Delta'_k := \{(xw, y, wy) \mid x, y \in \{a, b\} \wedge w \in \{a, b\}^{k-1}\}$$

Aufgabe 6
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie: Entweder wird L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt oder alle Klassen der zu L gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ sind einelementig.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\forall p, q \in \mathbb{N} : a^p \ \approx_L \ a^{p+q} \implies \{a^{p+iq} \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq [a^p]_{\approx_L}$

Aufgabe 7
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus (bezüglich der Konkatenation). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$
7. $h(L \cdot R) = h(L) \cdot h(R)$
8. $h(L \cdot R) = h(L) \cup h(R)$

Hinweis: Außer bei den Teilaufgaben 7 und 8 wird die Homomorphieeigenschaft nicht gebraucht. Die Teilaufgaben benötigen nur, dass h eine totale Funktion ist.

Aufgabe 8
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines deterministischen finiten Automaten A feststellt, ob das Komplement der erkannten Sprachen $L(A)$ unendlich ist.

Aufgabe 9
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe zweier nichtdeterministischer finiter Automaten A_1 und A_2 feststellt, ob die erkannten Sprachen $L(A_1)$ und $L(A_2)$ gleich sind.

Aufgabe 10
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man zu einem regulären Ausdruck α über einem Alphabet Σ einen regulären Ausdruck für $\overline{\mathcal{L}(\alpha)} = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\alpha)$ erzeugen kann.

Aufgabe 11
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines nichtdeterministischer finiten Automaten A feststellt, ob die erkannte Sprachen $L(A)$ leer, endlich oder unendlich ist.

Aufgabe 12 (für gute Studierende)
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache über $\Sigma = \{a\}$. Zeigen Sie, dass L^* regulär ist.

Aufgabe 13
Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 6 von Blatt 4, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{a^n b^n \mid n \in N\} \\ L_2 &:= \{w \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^+\} \\ L3 &:= \{w \cdot w \mid w \in \{a,b\}^+\} \end{aligned}$$

Achtung: Sinn dieser Aufgabe ist es, das Resultat aus der angegebenn Aufgabe zu verwenden. Deshalb werden andere Lösungswege nicht akzeptiert.

Aufgabe 14
.Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ. Zeigen Sie:

$$\exists k \in N \;\; \forall A \in \mathcal{P}(L) \text{ mit } |A| > k \;\; \exists w, w' \in A \;\; \exists x, x', y, y' \in \Sigma^* \text{ so, dass}$$
$$w \neq w' \;\wedge\; w = x \cdot y \wedge w' = x' \cdot y' \;\wedge\; |x| = |x'| \;\wedge\; x \neq \lambda \;\wedge\; x \cdot y' \in L \wedge x' \cdot y \in L$$

Hinweis: Betrachten Sie die Läufe eines erkennenden DFA. $\mathcal{P}(L)$ bezeichnet die Potenzmenge von L.

Aufgabe 15
Zu einem NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ konstruieren wir den Automaten $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, \{q_0\})$ mit $\delta' = \delta \cup \{(p, \lambda, q_0) \mid p \in F\}$ (der Startzustand q_0 wird einziger Endzustand, von jedem alten Endzustand geht eine λ-Transition zum Startzustand). Gilt $L(M') = L(M)^*$ für jeden finiten Automaten M?

Aufgabe 16
Wir betrachten die Sprachen L_2, L_3 und L_4:

$$\begin{aligned} L_2 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \; w \text{ enthält weniger } a\text{'s als } b\text{'s}\} \\ L_3 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist eine Quadratzahl oder } |w| \text{ ist eine Kubikzahl}\} \\ L_4 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \; |w| \text{ ist keine Primzahl}\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 nicht regulär sind.

Aufgabe 17
Wir betrachten die Sprachen L_2, L_3 und L_4:

$$\begin{aligned} L_2 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aa, ab, ba \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } w \text{ enthält genau so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\} \\ L_3 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid aa \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } |w| \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ L_4 &:= L((a \cup b)^* \cdot (aa \cup bb) \cdot (a \cup b)^*) \;\cup\; \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, die Sprachen L_2, L_3 und L_4 die reguläre Pumpingeigenschaft haben.
2. Zeigen Sie, dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 nicht regulär sind.

Aufgabe 18
Sei $L_k := \{w \in \{a,b\}^+ \mid \text{das } k\text{-letzte Zeichen von } w \text{ ist } a\}$ für $k \in N \setminus \{0\}$. Zeigen Sie für jedes $k \in N \setminus \{0\}$:

1. Es gibt einen NFA mit $k+1$ Zuständen, der L_k erkennt.
2. Kein vollständiger DFA mit weniger als 2^k Zustände erkennt L_k.
   Hinweis: Denken Sie an die zu L_k gehörende Relation $\approx_{L_k}$.
3. Es gibt einen vollständigen DFA mit 2^k Zuständen, der L_k erkennt.

Hinweis: Denken Sie an Aufgabe 5.