Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 5

Besprechung in KW 46 / Abgabe in KW 47

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 12, 13, 14, 15 und 16

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Sei $L := \{a^n b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

1. Die Wörter aus $\{a\}^*$ sind paarweise nicht äquivalent (bzgl. $\approx_L$).
2. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
3. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^{i+1}b^{2i+3}] = \{a^j b^l \mid j, l \in N \wedge l > 0 \wedge 3j - l = i\}$.
4. $\Sigma^*/\approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{[a^{i+1}b^{2i+3}] \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \{[b]\}$.

Hinweis: $\Sigma^*/\approx_L$ bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen von $\approx_L$ auf Σ^*.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die Sprachen $L_{\text{PAL}} := \{w \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ und $L_{\text{COPY}} := \{w \cdot w \mid w \in \{a,b\}^*\}$ nicht regulär sind.

Aufgabe 5
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_0 &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_1 &:= \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &= \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 6
Sei $n_0 := 0$ und $n_{i+1} := n_i + 2i + 1$ für $i \in \mathbb{N}$, weiter sei $Q := \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Sprache $L := \{a^j \mid j \in Q\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$, sowie die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$. Zeigen Sie:

1. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
2. $\Sigma^*/\approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\}$.
3. $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 7
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{a\}$. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_{21} &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 5\} \\ L_{22} &:= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{23} &:= \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \wedge p \text{ ist Primzahl}\} \\ L_{24} &:= \{a^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{25} &:= \{(a^2)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen die reguläre Pumping-Eigenschaft haben, jedoch nicht regulär sind.

$L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aa, ab, ba \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } w \text{ enthält genau so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\}$
$L_3 := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } |w| \text{ ist eine Quadratzahl}\}$
$L_4 := L((a \cup b)^* \cdot (aa \cup bb) \cdot (a \cup b)^*) \ \cup\ \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\}$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die zur Sprache gehörende Relation jeweils unendlich viele Klassen hat.

Aufgabe 9
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, A und B vollständige deterministische finite Automaten, $\sim_A$ und $\sim_B$ die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\approx_{L(A)}$ und $\approx_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $L(A) = L(B) \implies \sim_A = \sim_B$.
2. $L(A) = L(B) \implies \approx_{L(A)} = \approx_{L(B)}$.
3. $\approx_{L(A)} \supseteq \sim_A$.

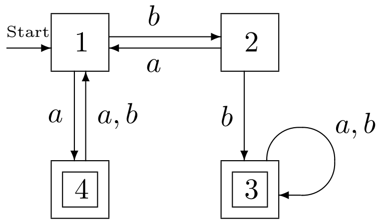
Aufgabe 10
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $\$ \notin \Sigma$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur unendlich große Klassen hat.
2. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat und L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt wird.
3. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilmenge $L' \subseteq L$.
4. Werden L und L' von DFA erkannt, so auch $(\{a\} \cdot L) \cup (\{b\} \cdot L')$.
5. Wird L von einem DFA erkannt und wird L' von keinem DFA erkannt, so wird $L \cup L'$ auch von keinem DFA erkannt.
6. Ist $\{\$\} \cdot L$ regulär, so ist auch L regulär.
7. Jede endliche Sprache ist regulär.
8. Ist $L \cup L'$ regulär, so sind auch L und L' regulär.
9. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.
10. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle endlich, so ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch endlich.

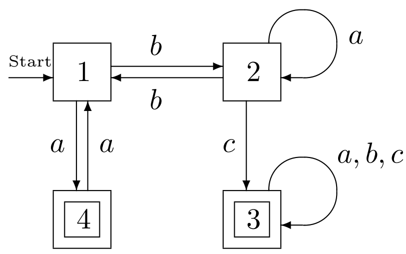
Aufgabe 11

Gegeben seien die folgenden finiten Automaten (der Startzustand s ist durch "Start" gekennzeichnet, die akzeptierenden Zustände durch die doppelte Einrahmung). Wir betrachten die zu den Automaten gehörende Rechtskongruenzrelationen $\sim_M$. Wieviele Klassen haben diese Äquivalenzrelationen. Beschreiben Sie die einzelnen Klassen jeweils durch reguläre Ausdrücke.

M_1 (mit $\Sigma_1 = \{a, b\}$)



M_2 (mit $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$)



Die Automaten erkennen Sprachen. Zu diesen Sprachen gehören wiederum Rechtskongruenzrelationen. Geben Sie an, wieviele Klassen die entsprechenden Relationen jeweils haben, und beschreiben Sie die einzelnen Klassen jeweils durch reguläre Ausdrücke!

Aufgabe 12

Gegeben sei der folgende λ-NFA $M = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\, \{a, b\}, \delta, 1, \{2, 3, 9, 8, 10\})$.

δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	$\{3\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{5\}$	$\{6, 4\}$	$\emptyset$	$\{4, 5\}$	$\{9, 10\}$	$\{8\}$	$\{8\}$
b	$\emptyset$	$\{4\}$	$\{7\}$	$\{8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{9\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{2\}$
λ	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{7\}$	$\{7\}$	$\{4\}$	$\emptyset$	$\{8\}$	$\emptyset$

Beschreiben Sie alle Klassen der zu $L(M)$ gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L(M)}$.
Hinweis: Konstruieren Sie zunächst einen äquivalenten DFA.

Aufgabe 13

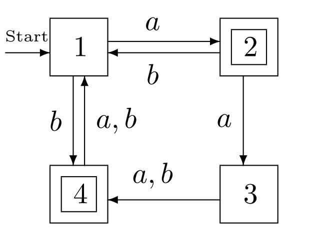
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, A und B vollständige deterministische finite Automaten, $\sim_A$ und $\sim_B$ die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\approx_{L(A)}$ und $\approx_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $L(A) \subseteq L(B) \implies \sim_A \subseteq \sim_B$
2. $\approx_{L(A)} \subseteq \approx_{L(B)} \implies \sim_A \subseteq \sim_B$

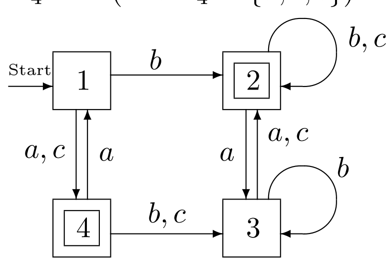
Aufgabe 14

Gleiche Aufgabenstellung wie in Aufgabe 11, jedoch mit den Automaten M_3 und M_4.

M_3 (mit $\Sigma_3 = \{a, b\}$)



M_4 (mit $\Sigma_4 = \{a, b, c\}$)



Aufgabe 15
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $\$ \notin \Sigma$. ein weiteres Zeichen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat
2. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine Sprache $L_n \subseteq \Sigma^*$ so dass der Index (d.h. die Anzahl der Äquivalenzklassen) der zu L_n gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L_n}$ genau n ist.
3. Zu jeder Sprache L die von einem DFA A erkannt wird, gibt es unendlich viele weitere DFA, die die gleiche Sprache erkennen und deren Zustandsanzahlen alle verschieden sind.
4. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilsprache L' mit $L' \subseteq L \subseteq \Sigma^*$.
5. Ist $L \cap L'$ nicht-regulär, so sind weder L noch L' regulär.
6. Wird L von einem vollständigen DFA mit p Zuständen erkannt und L' von einem vollständigen DFA mit q Zuständen erkannt, so gibt es vollständige DFAs mit pq Zuständen die $L \cup L'$ bzw. $L \cap L'$ erkennen,.
7. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.

Aufgabe 16
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $M = (Q, \Sigma, \delta, (0, 0), F)$ ein deterministischer endlicher Automat mit

$Q = \{(i, j) \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 1 \;\wedge\; 0 \leq j \leq 2\}$,

$\delta = \{(i, j), a, (i + 1 \bmod 2\ ,\ j\ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid\ i \leq 1\ ,\ j \leq 2\ \}$

$\cup\{(i, j), b, (i\ ,\ j + 1 \bmod 3\ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid\ i \leq 1\ ,\ j \leq 2\}$

1cm $\cup\ \{(i, j), c, (i\ ,\ j - 1 \bmod 3\ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid\ i \leq 1\ ,\ j \leq 2\}$, und

$F = \{(0, 0)\}$.

Welche der folgenden Wörtern $abc, aabcc, aa, aabcb, aababaaa$ werden von M akzeptiert? Beschreiben Sie die von M erkannte Sprache. Begründen sie Ihre Antwort.