Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 4

Besprechung in KW 45 / Abgabe in KW 46

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 12, 13 und 14

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Kann man die reguläre Pumping-Eigenschaft wie folgt abändern?

1. "($\forall w \in L$ mit $|w| \geq k$)" durch "($\forall w \in L$)" ersetzen.
2. "($\forall i \in \mathbb{N}$)" durch "($\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)" ersetzen.
3. "($\forall w \in L$ mit $|w| \geq k$)" durch "($\forall w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq k$)" ersetzen.
4. Die Bedingung "$v \neq \lambda$" weglassen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 4
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen L_i über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{w \in \{a,b\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^5\} \\
L_2 &:= \{wcw \mid w \in \{a,b\}^+\} \\
L_3 &:= \{a^{4n}b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_3 &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \ \wedge \ k \text{ ist Primzahl}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa$ ist Teilwort von w oder bb ist Teilwort von w oder $|w|$ ist eine Kubikzahl$\}$ die reguläre Pumpingeigenschaft hat, aber nicht regulär ist.
Hinweis: Betrachten Sie $L \cap L((ab)^*)$.

Aufgabe 6
Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ. Zeigen Sie:

$$\exists k \in N \ \forall A \in \mathcal{P}(L) \text{ mit } |A| > k \ \exists w, w' \in A \ \exists x, x', y, y' \in \Sigma^* \text{ so, dass}$$
$$w \neq w' \ \wedge \ w = x \cdot y \wedge w' = x' \cdot y' \ \wedge \ |x| = \lfloor |w|/2 \rfloor \wedge |x'| = \lfloor |w'|/2 \rfloor \ \wedge \ x \cdot y' \in L \wedge x' \cdot y \in L$$

Hinweis: Betrachten Sie die Läufe eines erkennenden DFA. $\mathcal{P}(L)$ bezeichnet die Potenzmenge von L.

Aufgabe 7

Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

1. $(A)^+ = A^* \setminus \{\lambda\}$.
2. $(A)^* = A^+ \cup \{\lambda\}$.
3. Sind A und B regulär, so ist auch $A \setminus B$ regulär.
4. Sind A und B regulär pumpbar, so ist auch $A \cup B$ regulär.
5. Ist A regulär und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär.
6. Jede endliche Sprache hat die reguläre Pumping-Eigenschaft.

Aufgabe 8

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $\alpha = (a \cup aba)^* \cdot a$ ein regulärer Ausdruck über Σ und $L = \mathcal{L}(\alpha)$. Konstruieren Sie ein λ-NFA zu L, einen DFA zu L, einen DFA zu $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ sowie einen regulären Ausdruck zu $\overline{L}$. Beschreiben Sie das Konstruktionsverfahren.

Aufgabe 9

Erkennen die beiden finiten Automaten $M_1 = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\,,\, \{a,b\}\,,\, \delta_1\,,\, 0\,,\, \{4,5,6\})$ und $M_2 = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\,,\, \{a,b\}\,,\, \delta_2\,,\, 0\,,\, \{2,5\})$ die gleiche Sprache? δ_1 und δ_2 sind gegeben durch:

δ_1	a	b
0	2	1
1	2	3
2	4	7
3	2	3
4	0	5
5	1	6
6	0	5
7	5	2

δ_2	a	b
0	1	3
1	2	6
2	3	2
3	4	0
4	5	7
5	0	5
6	2	1
7	5	7

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 10

Geben Sie Verfahren an, die bei Eingabe eines finiten Automaten M testen, ob M überhaupt ein Wort erkennt, bzw. unendlich viele Wörter erkennt, bzw. alle Wörter erkennt.

Aufgabe 11

Geben Sie Verfahren an, die bei Eingabe von zwei finiten Automaten M und M' testen, ob die von M und M' erkannten Sprachen gleich sind, bzw. ungleich sind, bzw. echte Teilmengen sind.

Aufgabe 12

Sei $\Sigma = \{a, b, d\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen L_i über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{array}{lcl} L_4 & := & \{w \cdot d \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^+\} \\ L_5 & := & \{w \in \{a, b, d\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^4\} \\ L_6 & := & \{a^n d^n b^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \ \wedge \ m \text{ ist Primzahl}\} \end{array}$$

Definition: $\overleftarrow{w}$ ist induktiv definiert vermöge $\overleftarrow{\lambda} := \lambda$ sowie $\overleftarrow{v \cdot x} := x \cdot \overleftarrow{v}$ für $x \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$.

Aufgabe 13

Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0, 1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

1. Ist A regulär pumpbar und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär pumpbar.
2. Ist A nicht regulär pumpbar und $A \subseteq B$, so ist auch B nicht regulär pumpbar.
3. Ist A regulär und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär.
4. Ist $A \cap B$ regulär, so sind auch A und B regulär.
5. Es gibt eine endliche Sprache über dem Alphabet $\{0, 1\}$, welche die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht besitzt.

Aufgabe 14

Skizieren Sie ein Verfahren an, die bei Eingabe von zwei regulären Ausdrücken α und α' testen, ob die durch α und α' beschriebenen Sprachen gleich sind, bzw. ungleich sind, bzw. echte Teilmengen sind.