

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 11

Besprechung in KW 02 / Abgabe in KW 03

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Bearbeitung von:

- Aufgabe 1, 3
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 17, 18 und 19

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen.

Aufgabe 4

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist entscheidbar.
2. L und \bar{L} sind semi-entscheidbar.
3. Es gibt eine Turingmaschine, die akzeptierend stoppt falls $x \in L$, und verwerfend stoppt, falls $x \notin L$.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare streng-monoton steigende Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder L ist endlich.
5. Die charakteristische χ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 5

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Die Menge der abzählbaren Sprachen über Σ ist überabzählbar.
2. Die Menge der aufzählbaren Sprachen über Σ ist abzählbar.
3. Es gibt nicht-aufzählbare Sprachen über Σ .

Aufgabe 6

Seien $L, L' \subseteq \{a, b\}^*$. Zeigen Sie:

1. Sind L und L' aufzählbar, so ist auch $L \cup L'$ aufzählbar.
2. Sind L und L' semi-entscheidbar, so ist auch $L \cap L'$ aufzählbar.
3. Sind L und L' aufzählbar, so ist auch $L \cdot L'$ aufzählbar.
4. Ist L aufzählbar, so ist auch L^* aufzählbar.
5. Ist L entscheidbar, so ist L aufzählbar.

Aufgabe 7

Geben Sie eine Turing-Maschine M an, die $\text{bin}(n)$ nach $\text{hex}(n)$ überführt, wobei $\text{hex}(n)$ die Hexadezimaldarstellung von n ist (niederwertige Stellen hinten). Geben Sie einen Lauf von M auf dem Wort 11110100101 an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise und Ihr Programm!

Aufgabe 8

Geben Sie Turing-Maschinen an, die aus einem Bandinhalt der Form $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k$ (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank (\square) getrennt) die folgenden Bandinhalte erzeugen ($w_1, w_2, \dots, w_k \in \{0, 1\}^+$):

1. $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k \square w_1$.
2. $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k \square w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k$.
3. $w_1 \square w_3 \square w_5 \square \dots \square w_n$ mit $n = \begin{cases} k-1 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$
4. $w_1 \square w_2 \square w_1 \square w_3 \square w_1 \square w_4 \square \dots \square w_{k-1} \square w_1 \square w_k$.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 9

Geben Sie eine Turing-Maschine an, die aus einem Bandinhalt der Form $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k$ (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank (\square) getrennt. $w_1, w_2, \dots, w_k \in \{0, 1\}^+$) den Bandinhalt $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k \square w_k \square w_{k-1} \square \dots \square w_2 \square w_1$ erzeugt.

Aufgabe 10

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist abzählbar.
2. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist abzählbar.
3. Jede Teilmenge einer abzählbaren Sprache ist abzählbar.
4. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist abzählbar.
5. Jede Obermenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.
6. Jede Obermenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.
7. Jede Teilmenge einer nichtentscheidbaren Sprache ist nichtentscheidbar.

Aufgabe 11

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist rekursiv aufzählbar.
2. L ist semi-entscheidbar.
3. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale injektive berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder L ist endlich.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder $L = \emptyset$.
5. $L = \text{Bild}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.
6. $L = \text{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.
7. Die semi-charakteristische φ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 12

Seien A_1, \dots, A_n paarweise disjunkte, abzählbare Teilmengen von $\{0, 1\}^*$ und sei A die Vereinigung der Mengen A_1, \dots, A_n . Zeigen Sie: Falls A entscheidbar ist, dann sind auch alle Mengen A_i entscheidbar ($i = 1, \dots, n$).

Aufgabe 13

Zeigen Sie: L entscheidbar $\Rightarrow \bar{L}$ entscheidbar

Aufgabe 14

Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für $\{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ an.

Aufgabe 15

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren $L := \{wc^i \mid w \in \Sigma^* \wedge i \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq i \leq |w|\}$. Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für L an.

Aufgabe 16

Zeigen Sie:

1. Zu jeder unendlichen aufzählbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschiedenen Funktionen f , die L aufzählen.
 2. Zu jeder semi-entscheidbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschiedenen Turingmaschinen M , die L semi-entscheiden.
 3. Zu jeder entscheidbaren Sprache L gibt es unendlich viele verschiedenen Turingmaschinen M , die L entscheiden.
-

Aufgabe 17

Sei f eine Funktion aus Σ^* nach Σ^* . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. f berechenbar \implies Bild(f) aufzählbar.
2. f berechenbar \implies Def(f) aufzählbar.
3. f berechenbar und total \implies Bild(f) entscheidbar.
4. f berechenbar und total \implies Def(f) entscheidbar.

Aufgabe 18

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer aufzählbaren Sprache ist aufzählbar.
2. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Sprache ist aufzählbar.
3. Jede aufzählbare Sprache hat eine entscheidbare Teilmenge.
4. Jede Teilmenge einer nichtaufzählbaren Sprache ist nichtaufzählbar.

Aufgabe 19

Ist die Klasse REC der entscheidbaren Sprachen abgeschlossen unter Schnitt, Vereinigung, Komplementbildung, Konkatenation, Iteration(*-Bildung)? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

E schéine Krëschttag an e glécklecht neit Joer!

Vrolijk Kerstmis en een een Gelukkig Nieuwjaar!

God Jul och Gott Nytt År!

Joyeux Noël et une Bonne Nouvelle Année!

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!
