Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 10

Besprechung in KW 51 / Abgabe in KW 02

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1, 3
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 15, 16, 17 und 18

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Drucken Sie das Übungsblatt aus, lesen Sie es vor dem nächsten Übungstermin durch, bringen Sie die ausgedruckte Version mit zu den Übungsterminen.

Aufgabe 4
Sei $L := \{w_1\#w_2\#w_3\cdots\#w_k\# \mid k\in\mathbb{N} \text{ gerade}, w_1\in\{a,b\}^+, \forall i\in\{1,\dots,k-1\} : w_i = \overleftarrow{w_{i+1}}\}$
$= \{(w\#\overleftarrow{w}\#)^n \mid n\in\mathbb{N}, w\in\{a,b\}^+\}$.

Zeigen Sie:

1. L ist nicht kontextfrei,
2. L ist Schnitt zweier kontextfreier Sprachen L_1 und L_2,
3. Das Komplement von L ist eine kontextfreie Sprache.
   Hinweis: Geben Sie einen erkennenden NPDA an

Aufgabe 5
Wir betrachten die *Dyck-Sprachen* $D_1 := L(G_1)$ und $D_2 := L(G_2)$, wo

$$\begin{aligned} G_1 &= (\{S\}, \{(,)\}, \{S \to SS, S \to \lambda, S \to (S)\}, S) \\ G_2 &= (\{S\}, \{(,),[,]\}, \{S \to SS, S \to \lambda, S \to (S), S \to [S]\}, S) \end{aligned}$$

1. Beschreiben Sie D_1 und D_2 umgangssprachlich.
   Siehe auch: `http://en.wikipedia.org/wiki/Dyck_language` (englische Version!).
2. Geben Sie erkennende Kellerautomaten für D_1 und D_2 an.
3. Geben Sie Homomorphismen g, h und eine reguläre Sprache R an, so dass $D_1 = h^{-1}(D_2 \cap R)$.
4. Geben Sie Homomorphismen g und h sowie eine reguläre Sprache R an, so dass $\{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\} = h^{-1}(D_2 \cap R)$ ist.

Aufgabe 6
L werde erzeugt von der Grammatik $G = (\{S, X, Y, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P die folgenden Regeln hat:

$$S \to XY\ ,\ Y \to CX\ ,\ X \to XA \mid XB \mid AX \mid BX\ ,\ A \to a\ ,\ B \to b\ ,\ C \to c$$

Prüfen Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmusses, ob die folgenden Wörter in L liegen.

$$abcabcabc\ ,\ abbabaa\ ,\ acacacacac\ ,\ cccccccccc\ ,\ bbbbcbbbb$$

Aufgabe 7
Zu $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{ANF}(L) &:= \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } wv \in L\}, \\ \mathrm{END}(L) &:= \{w \mid \exists v \in \Sigma^* \text{ mit } vw \in L\}, \\ \mathrm{SUB}(L) &:= \{w \mid \exists v, u \in \Sigma^* \text{ mit } vwu \in L\}. \end{aligned}$$

1. Geben Sie $\mathrm{ANF}(L)$, $\mathrm{END}(L)$ und $\mathrm{SUB}(L)$ für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):

$$L_1 := \{ab, aababb, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in N\}, \quad L_3 := \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

2. Sei $M = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer finiter Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	3	4	5	6	7	8
a	$\{2\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
b	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
c	$\emptyset$	$\{6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{7\}$	$\{7, 8\}$	$\{8\}$

Geben Sie nichtdeterministische Automaten an, die $\mathrm{ANF}(L(M))$, $\mathrm{END}(L(M))$ und $\mathrm{SUB}(L(M))$ erkennen.

3. Zeigen Sie: Wird L von einem finiten Automat erkannt, so auch $\mathrm{ANF}(L)$, $\mathrm{END}(L)$ und $\mathrm{SUB}(L)$.
4. Zeigen Sie: Wird L von einer kontextfreien Grammatik erzeugt, so auch $\mathrm{ANF}(L)$, $\mathrm{END}(L)$ und $\mathrm{SUB}(L)$.

Aufgabe 8
Sei L eine Sprache über Σ und L habe die Pumpingeigenschaft mit der Pumpingkonstanten k. Zeigen Sie:

1. $L \neq \emptyset \iff L \cap \Sigma^{\leq k} \neq \emptyset$
2. $|L| = \infty \iff L \cap (\Sigma^{\leq 2k} \setminus \Sigma^{\leq k}) \neq \emptyset$

Aufgabe 9
Geben Sie Verfahren an, die bei Eingabe eines endlichen Automaten M entscheiden, ob $L(M) = \emptyset$, $|L(M)| < \infty$, $|L(M)| = \infty$, $\overline{L(M)} = \emptyset$.

Aufgabe 10
Geben Sie Verfahren an, die bei Eingabe eines Kellerautomaten P entscheiden, ob $L(P) = \emptyset$, $|L(P)| < \infty$, $|L(P)| = \infty$.

Aufgabe 11
Geben Sie ein Verfahren an, das bei Eingabe von zwei endlichen Automaten M und M' entscheidet, ob $L(M) = L(M')$.

Aufgabe 12
Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist $\{0, 1, a\}$, $n, m \in \mathbb{N}$).

1. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \dot{-} m}$, wobei $n \dot{-} m := \begin{cases} n - m & \text{falls } n \geq m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
2. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \cdot m}$.
3. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n//m}$, wobei $n//m$ die ganzahlige Division von n durch m bezeichnet.
4. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \bmod m}$.
5. a^n nach $\mathrm{bin}\,(n)$, wobei $\mathrm{bin}\,(n)$ die Binärdarstellung von n ist (niederwertige Bits hinten).
6. $\mathrm{bin}\,(n)$ nach a^n.
7. $\mathrm{bin}\,(n) \,\square\, \mathrm{bin}\,(m)$ nach $\mathrm{bin}\,(n + m)$.
8. $\mathrm{bin}\,(n) \,\square\, \mathrm{bin}\,(m)$ nach $\mathrm{bin}\,(n \cdot m)$.
9. $\mathrm{bin}\,(n)$ nach $\mathrm{bin}\,(n^2)$ überführt.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 13
Geben Sie für folgende Sprachen jeweils entscheidende Turing-Maschinen an:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &= \{w \in \{a, b\}^* \mid \ abbb \text{ ist nicht Teilwort von } w\} \\ L_3 &= \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ L_4 &= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 14
Geben Sie Turing-Maschinen an, die aus einem Bandinhalt der Form $w_1 \square w_2 \square \cdots \square w_k$ (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank ($\square$) getrennt) die folgenden Bandinhalte erzeugen ($w_1, w_2, \ldots, w_k \in \{0, 1\}^+$):

1. $w_1 \square w_2 \square \cdots \square w_k \square w_1$.
2. $w_1 \square w_2 \square \cdots \square w_{k-1} \square w_k \square w_1 \square w_2 \square \cdots \square w_{k-1} \square w_k$.
3. $w_1 \square w_3 \square w_5 \square \cdots \square w_n$ mit $n = \begin{cases} k - 1 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$
4. $w_1 \square w_2 \square w_1 \square w_3 \square w_1 \square w_4 \square \cdots \square w_{k-1} \square w_1 \square w_k$.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 15
Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeichnen Sie das Venn-Diagramm mit folgenden Sprachmengen:

$P(\Sigma^*)$	alle Sprachen über Σ
REG	reguläre Sprachen über Σ
CFL	kontextfreie Sprachen über Σ
$\mathcal{A}_3$	Sprachen über Σ mit regulärer Pumping Eigenschaft
$\mathcal{A}_2$	Sprachen über Σ mit kontextfreier Pumping Eigenschaft

Tragen Sie überall eine Sprache ein, die im jeweiligen Bereich liegt, begründen Sie Ihre Eintragungen.
Bemerkung: Sie dürfen alle Sprachen aus den ÜbungsblÜattern verwenden.

Aufgabe 16
Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist $\{0, 1, a\}$, $n, m \in \mathbb{N}$). Kommentieren Sie Ihre Programme!

1. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \cdot m}$.
2. $\text{bin}(n) \Box \text{bin}(m)$ nach $\text{bin}(n+m)$.

Aufgabe 17
Geben Sie eine entscheidende Turing-Maschine (mit Kommentierung) für die folgende Sprache an:

$$L := \{wcwca^n \mid w \in \{a,b\}^* \wedge n \in \mathbb{N} \wedge 3 \cdot |w| = n\}$$

Aufgabe 18
Geben Sie eine Turing-Maschinen (mit Kommentierung) an, die folgende Funktion f berechnet:

$$f : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^* \text{ mit } f(w) = \begin{cases} (bba)^{3 \cdot \#_b(w)} & \text{, falls} \quad \#_a(w) \text{ nicht durch 4 teilbar,} \\ \text{undefiniert} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

E schéine Krëschtdag an e glécklecht neit Joer!

Vrolijk Kerstmis en een een Gelukkig Nieuwjaar!

God Jul och Gott Nytt År!

Joyeux Noël et une Bonne Nouvelle Année!

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!
