Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 1

Besprechung in KW 42

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

Dieses Blatt enthält noch keine Pflichthausaufgaben. Es soll Übungstoff für die erste Woche zu Verfügung stellen. Es geht nicht in die Bewertung der Übungsaufgaben ein.

Aufgabe 1
Sei Q die Menge der Bundesländer der Bundesrepublik Deutschland, und K die Menge der Paare $(a, b) \in Q \times Q$ für die das Bundesland a und das Bundesland b eine gemeinsame Grenze haben. Ist die Relation K reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, transitiv?

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung!

Hinweis: `http://de.wikipedia.org/wiki/Deutschland`

Aufgabe 2
Geben Sie für jede der folgenden Relationen an, welche der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch und transitiv auf sie zutreffen. Die Relationen seien jeweils über der Menge der Deutschen definiert.

1. x hat den gleichen Vater wie y.
2. x und y haben ein gemeinsames Kind.
3. x ist Vorfahre von y.

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung!

Aufgabe 3
Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig (in Zeichen $|A| = |B|$) genau dann, wenn es eine Bijektion (total, injektiv, surjektiv) von A auf B gibt.7

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\{0, 1\}^*$ gleichmächtig sind.
3. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ und $[0; 1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ gleichmächtig sind.
   Hinweis: Denken Sie an z. B. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{x}$.
4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig sind.

Aufgabe 4
Sei A eine Menge und $\mathcal{P}(A)$ die zugehörige Potenzmenge. Auf $\mathcal{P}(A)$ definieren wir die symetrische Differenz $\triangle$ vermöge:

$$B \triangle C := (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Aufgabe 5
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\mathbb{N}$. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Aussage!

1. $\emptyset = \{\emptyset\}$,
2. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
3. $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A$.

Aufgabe 6
Auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachten wir diem Relation R definiert durch:

$$iRj \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall k \in \mathbb{N} \,\mathrm{mit}\, k \,\mathrm{Primzahl}\colon k|i \Longrightarrow k|j)$$

Welche der folgenden Eigenschaften besitzt R :reflexiv, symetrisch, asymetrisch, antisymetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten!