

Neuronale Netze

Prof. Dr. Klaus Meer, M. Sc. Ameen Naif

Aufgabenblatt 5
21. Juni 2017

Aufgabe 1.

Formulieren Sie in Anlehnung an das Beispiel der Vorlesung einen konsistenten Lernalgorithmus für achsenparallele Quader im \mathbb{R}^n . Zeigen Sie die PAC-Lernbarkeit dieser Klasse und berechnen Sie eine passende Funktion $m(\epsilon, \delta)$ für die nötige Zahl von Beispielen, die der Algorithmus sehen muß, um die PAC-Bedingungen zu erfüllen.

Aufgabe 2.

Sei \mathcal{C} eine endliche Konzeptklasse und $\mathcal{H} = \mathcal{C}$. Zeigen Sie, daß ein konsistenter Lernalgorithmus \mathcal{C} PAC-lernt. Berechnen Sie eine geeignete Funktion $m(\epsilon, \delta)$. Diese kann von der Kardinalität der Konzeptmenge abhängen.

Aufgabe 3.

Für zwei natürliche Zahlen $k \leq n$ sei die Mengen der k -DNF die Klasse aller Booleschen Funktionen $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, die sich durch eine disjunktive Normalform darstellen lassen, in der die Monome jeweils eine maximale Länge k haben.

Beispiel: Eine 2-DNF über 4 Variablen ist $(x_1 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_4)$. Monome sind dabei die mit logischem ODER verknüpften Teile.

Entsprechend sagen wir, daß eine aussagenlogische Formel eine k -DNF Formel ist.

- Zeigen Sie, daß eine k -DNF Formel über n Variablen maximal $O((2n)^k)$ viele Monome hat.
- Zeigen Sie, daß es maximal $2^{O((2n)^k)}$ viele k -DNF Formeln über n Variablen gibt.
- Entwerfen Sie einen konsistenten Lernalgorithmus für k -DNF Formeln. Starten Sie von einer maximalen k -DNF, die alle Monome der maximalen Länge k enthält. Entfernen Sie dann geeignet bei neuen Beispielen gewisse dieser Monome.
- Zeigen Sie, daß Ihr Algorithmus aus c) die Konzeptklasse der k -DNF Formeln PAC lernt (bzw. korrigieren Sie Ihren Algorithmus in c) wenn nötig entsprechend). Analysieren Sie, wieviele Beispiele gesehen werden müssen, um die PAC-Bedingungen zu erfüllen. Funktioniert das Verfahren auch dann, wenn k nicht mehr fest ist?
- Wie läßt sich eine analog definierte Konzeptklasse k -KNF lernen (d.h. Formeln in konjunktiver Normalform mit maximal k Literalen pro Klausel)?

Hinweis: überlegen Sie, wie Ihr Verfahren auf positiven Beispielen (d.h. solchen, für die die gesuchte Formel erfüllt wird) und auf negativen Beispielen arbeitet. Leiten Sie daraus eine Analyse für einen möglichen Gesamtfehler $\geq \epsilon$ her.

Für diese Analyse ist folgender Satz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung hilfreich: Ein Bernoulli-Experiment werde m mal durchgeführt und habe eine Erfolgswahrscheinlichkeit von p . Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß man weniger als k Erfolge erhält, nach oben durch $\exp(-mp + k) \cdot \left(\frac{mp}{k}\right)^k$ beschränkt.

Aufgabe 4.

Als einfachere Variante zu Aufgabe 44 betrachten wir nun die Konzeptklasse aller Monome über n Variablen, d.h. alle Terme der Form $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_s}$ mit $x_{i_j} \in \{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$, wobei $s \leq 2n$.

- a) Formulieren Sie einen konsistenten Lernalgorithmus für die Klasse der Monome.
- b) Führen Sie Ihren Algorithmus an folgendem Beispiel durch. Die Zahl der Variablen sei $n := 7$; als Beispiele sehen Sie nacheinander die Vektoren

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= 1001111 && \text{positiv} \\x^{(2)} &= 0110110 && \text{negativ} \\x^{(3)} &= 1011101 && \text{positiv} \\x^{(4)} &= 1011001 && \text{positiv}\end{aligned}$$

Ein Beispiel ist dabei positiv, wenn das Zielkonzept von ihm erfüllt wird.