Neuronale Netze

Prof. Dr. Klaus Meer, M. Sc. Ameen Naif

Aufgabenblatt 2
26. April 2017

Aufgabe 1.

Es seien C_1, C_2 endliche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ so, dass es ein $b \in \mathbb{R}$ und ein $z \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$z^T \cdot x \geq b \;\; \forall\, x \in C_1 \;\;,\;\; z^T \cdot x < b \;\; \forall\, x \in C_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass man ohne Einschränkung $b = 1$ annehmen darf.

(b) Zeigen Sie dass, es $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$ und $c > 0$ mit

$$\tilde{z}^T \cdot x \geq 1 + c \;\; \forall\, x \in C_1 \;\;,\;\; \tilde{z}^T \cdot x \leq 1 - c \;\; \forall\, x \in C_2$$

gibt.

Aufgabe 2.

Es seien C_1, C_2 wie in Aufgabe 1. Ferner gebe es $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$ und $c > 0$ mit

$$\tilde{z}^T \cdot x \geq 1 + c \;\; \forall\, x \in C_1 \;\;,\;\; \tilde{z}^T \cdot x \leq 1 - c \;\; \forall\, x \in C_2.$$

Zeigen Sie:

$$inf\{\|x - y\|_2 \mid x \in C_1, y \in C_2\} \;\geq\; \frac{2c}{\|\tilde{z}\|_2}$$

Dabei bezeichne $\|\tilde{z}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_i^2}$ die euklidische Norm von $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3.

Beim Optimieren eines Netzwerks treten häufig differenzierbare Funktionen auf, deren Minimum gesucht wird (z.B. Energiefunktionen). Hier ist es notwendig, sich nochmals an elementare Ableitungsregeln der multivariaten Analysis zu erinnern.

Für eine (stetig) differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Ableitung gegeben durch:

$$Df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} := \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right) \;.$$

(a) Beweisen Sie, dass $\forall\, x, h \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{\partial h^T \cdot x}{\partial x} = \frac{\partial x^T \cdot h}{\partial x} = h$$

(b) Zeigen Sie

$$\frac{\partial x^T \cdot M \cdot x}{\partial x} = 2 \cdot M \cdot x$$

für eine beliebige symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. $M^T = M$.

(c) Zeigen Sie

$$\frac{\partial \|x\|_2}{\partial x} = \frac{x}{\|x\|_2},$$

wobei $x \neq 0$ ist.

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Ellipse $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. Finden Sie die Scheitelpunkte, d.h. die Punkte (x, y) mit minimalen bzw. maximalen Abstand zum Mittelpunkt $(0, 0)$.

(a) Von welcher Funktion (nennen wir sie f) müssen Extremwerte gesucht werden? Unter welchen Nebenbedingungen (eine Funktion g)?

(b) Lösen Sie für die Lagrangesche Funktion $L(x, y) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$ die Gleichung: $DL(x, y) = grad(L) = 0$.

(c) Setzen Sie die gewonnenen Informationen in die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ ein, um die möglichen Extremstellen zu finden.

Aufgabe 5.

(a) Zeigen Sie, daß $f(x) := \frac{1}{2} x^T x$ konvex ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede lineare Funktion $f(x) := b^T x + c, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ konvex ist.

(c) Zeigen Sie: für eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist

$$f(x) := x^T M x$$

konvex genau dann, wenn M positiv semi-definit ist, d.h. wenn gilt: $\forall\ h \in \mathbb{R}^n$ ist $h^T \cdot M \cdot h \geq 0$.