Neuronale Netze

Prof. Dr. Klaus Meer, M. Sc. Ameen Naif

Aufgabenblatt 1
13. April 2017

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass das $Perceptron$ die booleschen Funktionen AND und OR berechnen kann, aber die Funktion XOR nicht. Versuchen Sie, die Funktion XOR mit einem $Feedforward - Netz$ zu berechnen.

Aufgabe 2.

Betrachten Sie als Aktivierungsfunktion die Abbildung

$$\varphi(t) := \frac{1}{1 + e^{-c \cdot t}} \ .$$

Dabei sei c eine beliebige, positive reelle Konstante. Bestimmen Sie die Grenzwerte von φ für t gegen ∞ und gegen $-\infty$ sowie den Wert im Ursprung. Wie verändert sich der Verlauf von φ in Abhängigkeit von c? Berechnen Sie die erste Ableitung von φ und drücken Sie das Ergebnis mittels φ aus.

Aufgabe 3.

(Hesse-Normalenform) Wir betrachten im $\mathbb{R}^n$ Teilmengen der Form

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n | w^T \cdot x = d\} \tag{1}$$

mit konstanten $w \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}$.

(a) Eine *Hyperebene* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge HE, die wie folgt beschrieben werden kann. Es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (Ortsvektor) sowie $n-1$ linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ so, dass gilt:

$$HE := \{x \in \mathbb{R}^n | \text{es gibt } t_i \in \mathbb{R} \text{ mit } x = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} t_i \cdot v_i\}$$

Zeigen Sie, dass beide Darstellungen äquivalent sind, d.h. Hyperebenen sind genau die Mengen, die durch (1) beschrieben werden.

(b) Eine Hyperebene, die in Form (1) mit $\|w\|_2 = 1$ gegeben ist, heisst in *Hesserscher Normalenform* dargestellt. Geben Sie in diesem Fall eine geometrische Interpretation von w und d und beweisen Sie, dass Ihre Interpretation korrekt ist.

Aufgabe 4.

Gegeben sei ein McCulloch-Pitts Neuron (Aktivierung mit Thresholdwert 0) mit Gewichten w_i und Bias b. Die Parameter sind so gewählt, dass zwei endliche Punktmengen C_1, C_2 korrekt klassifiziert werden. Zeigen Sie, dass die Gewichte w_i verändert werden können, so dass der Bias den Wert 1 erhält während alle Punkte aus $C_1 \cup C_2$ weiterhin korrekt klassifiziert werden. Beachten Sie auch Ausgangssituationen mit $b = 0$.

Aufgabe 5.

Für eine positive Konstante c betrachten Sie die Funktion

$$\varphi(t) := \tanh\left(\frac{ct}{2}\right) := \frac{1 - \exp(-ct)}{1 + \exp(-ct)}.$$

Bestimmen Sie die Grenzwerte von φ für t gegen ∞ und gegen $-\infty$ sowie den Wert im Ursprung. Was geschieht, wenn der Parameter c gegen ∞ strebt? Berechnen Sie die Ableitung von φ.

Aufgabe 6.

Betrachten Sie die Funktion

$$\varphi(t) := \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} .$$

Berechnen Sie die Grenzwerte für t gegen ∞ und gegen ∞, die Ableitung von φ sowie deren Wert im Ursprung.